Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΣΥΜΒΟΛΗ, ΜΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ, ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ

Δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 που απέχουν απόσταση d=24cm, αρχίζουν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή t=0 με εξισώσεις $y_1=y_2=A\eta\mu\omega t$ $(y \rightarrow cm,\ t \rightarrow s)$ αντίστοιχα και δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια νερού που ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή $t_1=1{,}175s$ στα σημεία Σ και Ν που βρίσκονται στην επιφάνεια του νερού και αριστερά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος O_1O_2, έχει φθάσει μόνο το κύμα που δημιουργεί η πηγή O_1. Η φάση του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_1 είναι $\varphi_\Sigma=3\pi$ rad. Την ίδια χρονική στιγμή η διαφορά φάσης μεταξύ του σημείου Σ και του σημείου Ν είναι $\Delta\varphi=\frac{9\pi}{2}\text{rad}$. Εάν οι αποστάσεις που απέχει το σημείο Σ από τις πηγές O_1 και O_2 είναι $O_1\Sigma=r_1=20{,}5cm$ και $O_2\Sigma=r_2=24{,}5cm$ αντίστοιχα και η απόσταση του σημείου Ν από την πηγή O_1 είναι
$O_1N=r'_1=16cm$, να υπολογιστούν:

Α$_1$. Το μήκος κύματος λ των παραγομένων από τις πηγές O_1 και O_2 αρμονικών κυμάτων καθώς και η περίοδος τους Τ.

Α$_2$. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων υ στην επιφάνεια του νερού.

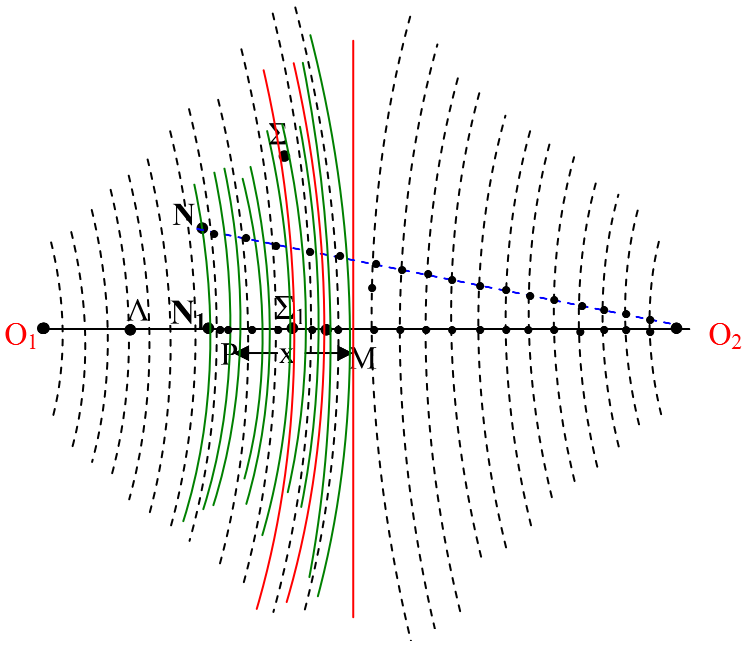
Β$_1$. Εάν μετά την συμβολή των δύο κυμάτων στα σημεία Σ και Ν, το σημείο Ν βρίσκεται πάνω σε υπερβολή αριστερά της μεσοκαθέτου του τμήματος O_1O_2 και ταλαντώνεται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με το μισό της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Σ, να βρεθεί μία παραμετρική συνθήκη που να συνδέει τις αποστάσεις r'_1 και r'_2 από τις πηγές O_1 και O_2 των σημείων της επιφάνειας του νερού που βρίσκονται μεταξύ των δύο πηγών και ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με το σημείο Ν. Εάν το Ν βρίσκεται πάνω στην υπερβολή που αντιστοιχεί στην τιμή 9 της παραμέτρου, να βρεθεί η απόσταση O_2N που απέχει από την πηγή O_2.

Β$_2$. Μετά την συμβολή των δύο κυμάτων, να υπολογιστεί το πλήθος των υπερβολών που αποτελούνται από σημεία που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με το σημείο Ν και βρίσκονται μεταξύ των σημείων Ν και Σ.

Β$_3$. Να υπολογιστεί το πλήθος των σημείων της επιφάνειας του νερού που βρίσκονται στην ευθεία O_2N και παραμένουν ακίνητα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

Γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της διαφοράς φάσης Δφ μεταξύ των σημείων Ν και Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο ταλάντωσης t. Να θεωρήσετε ότι όλα τα σημεία της επιφάνειας του νερού έχουν την ίδια μάζα και ότι τα κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού χωρίς απώλειες ενέργειας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Οι κόκκινες υπερβολές αποτελούνται από σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος (ενίσχυση).
Οι διακεκομμένες υπερβολές αποτελούνται από σημεία που παραμένουν ακίνητα (απόσβεση).
Οι πράσινες υπερβολές αποτελούνται από σημεία που ταλαντώνονται με πλάτος $A\sqrt{2}$.

A₁. Όταν τα σημεία Σ και Ν ταλαντώνονται μόνο υπό την επίδραση του αρμονικού κύματος, που παράγει η πηγή O_1, οι εξισώσεις ταλάντωσης τους είναι: $y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda})$ και $y_N = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1'}{\lambda})$. Οι εξισώσεις των φάσεων τους σε συνάρτηση με το χρόνο είναι αντίστοιχα : $\phi_\Sigma = 2\pi\,(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda})$ (1) και $\phi_N = 2\pi\,(\frac{t}{T} - \frac{r_1'}{\lambda})$ (2). Τη χρονική στιγμή t_1: Από

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \phi_\Sigma = 2\pi\,(\frac{t_1}{T} - \frac{r_1}{\lambda}) \Rightarrow 3\pi = 2\pi(\frac{1{,}175}{T} - \frac{20{,}5}{\lambda}) \Rightarrow 1{,}5 = \frac{1{,}175}{T} - \frac{20{,}5}{\lambda} \quad (3)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Σ και Ν τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\Delta\phi = \phi_N - \phi_\Sigma \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \frac{9\pi}{2} = 2\pi(\frac{r_1 - r_1'}{\lambda}) \Rightarrow 2{,}25 = \frac{20{,}5 - 16}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2cm \Rightarrow \lambda = 2\cdot 10^{-2}m. \quad (4)$$

Από $(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} T = 0{,}1s.\ (5)$

A₂. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων που παράγουν οι πηγές O_1 και O_2 είναι:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} \underset{(5)}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} \upsilon = 0{,}2m/s$$

B₁. Όταν τα δύο κύματα συμβάλλουν στο σημείο Σ, αυτό ταλαντώνεται με πλάτος

$$A_\Sigma = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_2 - r_1)}{2\lambda} \overset{(4)}{\Rightarrow} A_\Sigma = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(24{,}5 - 20{,}5)}{2\cdot 2} \Rightarrow A_\Sigma = 2A\ (6).$$

(ενισχυτική συμβολή). Το σημείο Ν μετά την συμβολή των δύο κυμάτων ταλαντώνεται με ενέργεια E_N ίση με το μισό της ενέργειας ταλάντωσης E_Σ του σημείου Σ:

$$E_N = \frac{E_\Sigma}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}DA_N^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}DA_\Sigma^2 \Rightarrow m_N\omega^2 A_N^2 = \frac{m_\Sigma\omega^2 A_\Sigma^2}{2}$$

$$\underset{(6)}{\overset{m_N = m_\Sigma}{\Rightarrow}} A_N^2 = \frac{4A^2}{2} \Rightarrow A_N = A\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_1' - r_2')}{2\lambda}\right| = A\sqrt{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1' - r_2')}{\lambda} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi\left|(r_1' - r_2')\right|}{\lambda} = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left|r_1' - r_2'\right| = \kappa\lambda \pm \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \left|r_1' - r_2'\right| = (4\kappa \pm 1)\frac{\lambda}{4} \quad \mu\varepsilon \quad \kappa = 0,1,2...$$

Αλλά $4\kappa \pm 1 =$ περιττός ακέραιος $= 2N + 1$. Άρα $\left|r_1' - r_2'\right| = (2N+1)\frac{\lambda}{4} \overset{(4)}{\Rightarrow}$

$\left|r_1' - r_2'\right| = (2N+1)\frac{1}{2}$ με $N = 0,1,2...$ (7) Η (7) αποτελεί τη ζητούμενη συνθήκη.

Επειδή το σημείο Ν βρίσκεται στην υπερβολή με $N = 9$, από

$$(7) \overset{r_2' > r_1'}{\Longrightarrow} r_2' - r_1' = (2\cdot 9 + 1)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow r_2' = r_1' + 9{,}5 \Rightarrow r_2' = 25{,}5cm.$$

Άρα η απόσταση O_2N είναι $O_2N = r_2' = 25{,}5cm$.

B₂. Από τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής στο σημείο Σ:

$r_2 - r_1 = 2\kappa\frac{\lambda}{2} \xRightarrow{(4)} 24{,}5 - 20{,}5 = \kappa \cdot 2 \Rightarrow \kappa = 2$. Άρα το Σ βρίσκεται στην $2^{η}$ υπερβολή ενισχυτικής συμβολής αριστερά της μεσοκαθέτου της O_1O_2 η οποία τέμνει την O_1O_2 στο σημείο Σ_1.

Για το σημείο Σ_1 έχουμε: $(O_2\Sigma_1) - (O_1\Sigma_1) = 2\kappa\frac{\lambda}{2} \xRightarrow{(4)} (O_2\Sigma_1) - (O_1\Sigma_1) = 4cm \quad (8)$

και $(O_2\Sigma_1) + (O_1\Sigma_1) = 24cm \quad (9)$.

Αθροίζοντας τις σχέσεις (8) και (9) κατά μέλη: $(O_2\Sigma_1) = 14cm$

$\Rightarrow (O_2M) + (M\Sigma_1) = 14 \Rightarrow 12 + (M\Sigma_1) = 14 \Rightarrow (M\Sigma_1) = 2cm \quad (10)$.

Η υπερβολή στην οποία βρίσκεται το σημείο Ν τέμνει την O_1O_2 στο σημείο N_1, για το οποίο έχουμε: $(O_2N_1) - (O_1N_1) = (2\cdot 9 + 1)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow (O_2N_1) - (O_1N_1) = 9{,}5cm \quad (11)$ και

$$(O_2N_1) + (O_1N_1) = 24cm \quad (12)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (11) και (12) κατά μέλη: $(O_2N_1) = 16{,}75cm \; (13)$. Αλλά

$(O_2N_1) = (O_2M) + (MN_1)$

$\xRightarrow{(13)} (O_2M) + (MN_1) = 16{,}75cm \Rightarrow 12 + (MN_1) = 16{,}75 \Rightarrow$

$\Rightarrow (MN_1) = 4{,}75cm \quad (14)$.

Για ένα τυχαίο σημείο Ρ της ευθείας O_1O_2 που βρίσκεται μεταξύ των N_1 και Σ_1 και ταλαντώνεται με το ίδιο πλάτος με το σημείο Ν (άρα και με το σημείο N_1), εάν θεωρήσουμε ότι απέχει x από το σημείο Μ έχουμε:

Από

$(7): (O_2P) - (O_1P) = (2N+1)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 12 + x - 12 + x = N + 0{,}5 \Rightarrow x = \frac{N}{2} + 0{,}25$.

Αλλά $(M\Sigma_1) < x < (MN_1) \xRightarrow[(14)]{(10)} 2 < \frac{N}{2} + 0{,}25 < 4{,}75 \Rightarrow 4 < N + 0{,}5 < 9{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3{,}5 < N < 9 \Rightarrow N = 4,5,6,7,8$ (5 υπερβολές).

Άρα μεταξύ των σημείων Σ και Ν υπάρχουν 5 υπερβολές που αποτελούνται από σημεία που ταλαντώνονται με πλάτος ίσο με το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Ν.

B₃. Τα σημεία της ευθείας O_2N που παραμένουν ακίνητα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων βρίσκονται πάνω σε υπερβολές αποσβεστικής συμβολής. Το πλήθος τους είναι είναι όσο και το πλήθος των σημείων που βρίσκονται πάνω στην O_2N_1 και είναι ακίνητα.

1ος τρόπος

Η συνθήκη για ένα σημείο Λ από αυτά είναι: $(O_2\Lambda) - (O_1\Lambda) = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}$ με $\kappa = 0,1,2...$

$\xRightarrow{(4)} (O_2\Lambda) - (O_1\Lambda) = 2\kappa + 1 \quad (15)$ και $(O_2\Lambda) + (O_1\Lambda) = 24cm \quad (16)$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (15) και (16) κατά μέλη: $(O_2\Lambda) = \kappa + 12{,}5$.

Αλλά $0 \le (O_2\Lambda) \le O_2N_1 \overset{(13)}{\Longrightarrow} 0 \le \kappa + 12{,}5 \le 16{,}75 \Rightarrow -12{,}5 \le \kappa \le 4{,}25$

Άρα $\kappa = -12,-11,-10 \ldots -1,0,1,2,3,4$, δηλαδή υπάρχουν 17 σημεία που παραμένουν ακίνητα πάνω στην ευθεία O_2N_1 άρα και στην ευθεία O_2N.

2[ος] τρόπος

Υπολογίζουμε την απόσταση d* μεταξύ δύο σημείων A_1 και A_2 του ευθύγραμμου τμήματος (O_1O_2) που βρίσκονται σε δύο διαδοχικές υπερβολές αποσβεστικής συμβολής:

$(O_2A_2)-(O_1A_2)= \left[2(N+1)+1\right]\dfrac{\lambda}{2}$ (α)

$(O_2A_1)-(O_1A_1)= (2N+1)\dfrac{\lambda}{2}$ (β) με N=0,1,…

Με αφαίρεση κατά μέλη των (α) και (β):

$(O_2A_2)-(O_2A_1)+(O_1A_1)-(O_1A_2)=\lambda \Rightarrow 2(A_1A_2)=\lambda \Rightarrow 2d^*=\lambda \Rightarrow \; d^*=\dfrac{\lambda}{2}$

Η απόσταση d_1 μεταξύ δύο σημείων E_1 και A_1 του ευθύγραμμου τμήματος (O_1O_2) που βρίσκονται σε δύο διαδοχικές υπερβολές ενισχυτικής και αποσβεστικής συμβολής είναι:

$(O_2E_1)-(O_1E_1)=2N\dfrac{\lambda}{2}$ (γ) με N=0,1,…

Με αφαίρεση κατά μέλη των (β) και (γ):

$(O_2A_1)-(O_2E_1)+(O_1E_1)-(O_1A_1)=\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow 2(A_1E_1)=\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow 2d_1=\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \; d_1=\dfrac{\lambda}{4}$

Με βάση τα προηγούμενα το πρώτο ακίνητο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος (O_1O_2) δεξιά του Μ θα απέχει από αυτό απόσταση $\dfrac{\lambda}{4} \overset{(4)}{=} 0{,}5cm$ και τα επόμενα θα βρίσκονται σε θέσεις που θα απέχουν μεταξύ τους κατά $\dfrac{\lambda}{2} \overset{(4)}{=} 1cm$. Δηλαδή, σε θέσεις που θα απέχουν από το Μ αποστάσεις: 1,5cm, 2,5cm, 3,5cm, 4,5cm, 5,5cm, 6,5cm, 7,5cm, 8,5cm, 9,5cm, 10,5cm, 11,5cm (12 σημεία). Αντίστοιχα αριστερά του σημείου Μ και μέχρι τη θέση του σημείου N_1 που απέχει από το Μ απόσταση 4,75cm θα υπάρχουν ακίνητα σημεία που θα απέχουν από το Μ: 0,5cm, 1,5cm, 2,5cm, 3,5cm, 4,5cm (5 σημεία). Άρα συνολικά στο τμήμα (O_2N_1) υπάρχουν 17 ακίνητα σημεία και επειδή ισάριθμες υπερβολές αποσβεστικής συμβολής θα τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα (O_2N_1) – άρα και το ευθύγραμμο τμήμα (O_2N)- θα έχουμε 17 ακίνητα σημεία και στο ευθύγραμμο τμήμα (O_2N).

Γ. Τα κύματα από τις πηγές O_1 και O_2 φθάνουν στο σημείο Σ τις χρονικές στιγμές $t_1 = \dfrac{r_1}{\upsilon} = 1{,}025s$ και $t_2 = \dfrac{r_2}{\upsilon} = 1{,}225s$ αντίστοιχα. Στο σημείο Ν φθάνουν τις χρονικές στιγμές $t_3 = \dfrac{r_1'}{\upsilon} = 0{,}8s$ και $t_4 = \dfrac{r_2'}{\upsilon} = 1{,}275s$ αντίστοιχα.

Από $0 \le t < 0{,}8s: \; \Delta\varphi_{N\Sigma} = 0$

$0{,}8s \le t < 1{,}025s: \Delta\varphi_{N\Sigma} = \varphi_N - \varphi_\Sigma = 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1'}{\lambda}\right) - 0$ με αντικατάσταση:

$$\Delta\varphi_{N\Sigma} = 20\pi t - 16\pi \text{ rad}$$

$1,025s \le t < 1,225s: \ \Delta\varphi_{N\Sigma} = \varphi_N - \varphi_\Sigma = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1'}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$

$\Rightarrow \Delta\phi_{N\Sigma} = 2\pi\left(\frac{r_1 - r_1'}{\lambda}\right)$ με

αντικατάσταση: $\Delta\varphi_{N\Sigma} = \frac{9\pi}{2}\text{rad}$

$1,225s \le t < 1,275s: \Delta\varphi_{N\Sigma} = \varphi_N - \varphi_\Sigma = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1'}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\varphi_{N\Sigma} = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} - \frac{r_1'}{\lambda}\right)$

με αντικατάσταση: $\Delta\varphi_{N\Sigma} = \frac{13\pi}{2}\text{rad}$

$t \ge 1,275s: \Delta\varphi_{N\Sigma} = \varphi_N - \varphi_\Sigma = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1' + r_2'}{2\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\varphi_{N\Sigma} = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} - \frac{r_1' + r_2'}{2\lambda}\right)$

με αντικατάσταση: $\Delta\varphi_{N\Sigma} = \frac{7\pi}{4}\text{rad}$