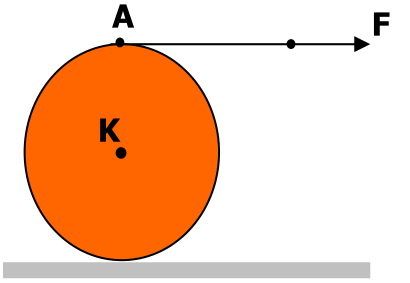
ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΡΟΠΗ



Ομογενής δίσκος μάζας m=4kg και ακτίνας R=0,5m ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ_s=0,5. Στην περιφέρεια του δίσκου έχει τυλιχτεί νήμα αμελητέας μάζας στο ελεύθερο άκρο του οποίου τη χρονική στιγμή t=0 ασκείται οριζόντια εξωτερική δύναμη F. Το μέτρο της δύναμης F δίνεται από τη σχέση F=3π - 6θ (S.I) όπου $\hat{\theta}$ = η γωνία περιστροφής του δίσκου. Η δύναμη F μετά το μηδενισμό του μέτρου της καταργείται.

Α. Να μελετηθεί η κίνηση του δίσκου μέχρι τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται το μέτρο της δύναμης F.

Β. Τη χρονική στιγμή t=0 που αρχίζει να επιδρά στο δίσκο η δύναμη F να υπολογιστούν:

Β₁. Η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

Β₂. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου.

Γ. Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.

Δ. Όταν ο δίσκος έχει στραφεί κατά γωνία $\hat{\theta}=\frac{\pi}{4}$rad:

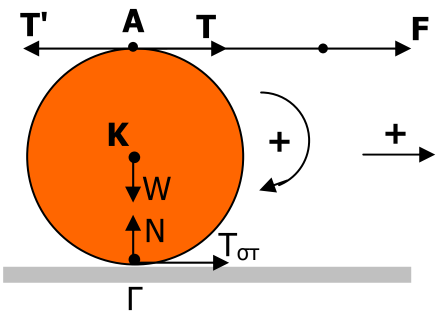
Δ₁. Να υπολογιστεί ο ρυθμός παραγωγής έργου από τη δύναμη F.

Δ₂. Αν αναλύσουμε την κίνηση του δίσκου σε μία μεταφορική και μία στροφική κίνηση περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης, να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μεταφορικής και στροφικής κίνησης, $\frac{dK_\mu}{dt}$ και $\frac{dK_{\sigma\tau}}{dt}$ αντίστοιχα.

Δ₃. Με τη βοήθεια κατάλληλων θεωρημάτων ή αρχών να περιγραφούν οι ενεργειακοί μετασχηματισμοί που συμβαίνουν και να γίνει η αριθμητική τους επαλήθευση για την χρονική στιγμή που ο δίσκος έχει στραφεί κατά γωνία $\hat{\theta}=\frac{\pi}{4}$rad.

Δίνονται: $g=10m/s^2$, $\pi^2=10$, $\pi=\sqrt{10}$ και η ροπή αδρανείας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος σε αυτόν $I_\kappa=\frac{1}{2}mR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α. Στο αμελητέας μάζας νήμα ασκούνται η δύναμη $\vec{F}$ και η δύναμη από το δίσκο $\vec{T}'$. Για το νήμα ισχύει

$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow T'=F$ (1).

Από το νήμα ασκείται στο δίσκο η δύναμη $\vec{T}$. Αλλά

$\vec{T}=-\vec{T}' \overset{(1)}{\Rightarrow} T=F \Rightarrow \quad T=3\pi-6\theta$ (S.I) (2).

Στο δίσκο επίσης ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους του $\vec{W}$, η κάθετη αντίδραση N και η δύναμη τριβής. Επειδή $\Sigma\vec{F}_y=0 \Rightarrow N=W \Rightarrow N=mg$ (3).

Η οριακή (μέγιστη) τιμή της στατικής τριβής είναι $T_{στ,\,ορ}=\mu_s N \overset{(3)}{\Rightarrow} T_{στ,\,ορ}=\mu_s mg \Rightarrow$
$T_{στ,\,ορ}=0{,}5 \cdot 4 \cdot 10=20N$ (4).
Έστω ότι ο δίσκος θα εκτελέσει κύλιση χωρίς ολίσθηση. Αν a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου και $a_{γων}$ η γωνιακή του επιτάχυνση, ισχύει $a_{γων}=\dfrac{a_{cm}}{R}$ (5).

Από το Θ.Ν.Μ για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου:
$\Sigma F=ma_{cm} \Rightarrow T+T_{στ}=ma_{cm}$ (6).
Από το Θ.Ν.Μ για τη στροφική κίνηση του δίσκου, θεωρώντας ως θετικές τις δεξιόστροφες ροπές έχουμε:

$\Sigma\tau_{(K)}$: $I_{(K)}a_{γων} \Rightarrow TR-T_{στ}R=\dfrac{1}{2}mR^2 a_{γων} \overset{(5)}{\Rightarrow} 2(T-T_{στ})=ma_{cm}$ (7)

Από (6) και (7) $T_{στ}=\dfrac{T}{3}$ (8α) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $T_{στ}=π-2θ$ (S.I) (8)

Τη χρονική στιγμή t=0 ο δίσκος ηρεμεί και $\hat{θ}=0$. Από την (8) για $\hat{θ}=0$ έχουμε $T_{στ}=π$ N< $T_{στ,\,ορ}$=20N, άρα ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Από τη σχέση (8) προκύπτει ότι καθώς ο δίσκος στρέφεται η $T_{στ}$ ελαττώνεται άρα η συνθήκη της κύλισης χωρίς ολίσθησης θα ικανοποιείται μέχρι το μηδενισμό της F.
Από τις (6) και (8) προκύπτει $a_{cm}=π-2θ$ (S.I) (9) και από (5) και (9) $a_{γων}=2π-4θ$ (S.I) (10).
Από τις (9) και (10) προκύπτει ότι ο δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση επιταχυνόμενος με ελαττούμενη επιτάχυνση.

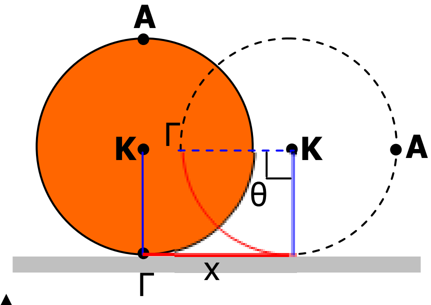
Β₁. Για $\hat{θ}=0$ από τη (10): $a_{γων_0}=2π\ rad/s^2$

Β₂. Από το Θ.Ν.Μ για τη στροφική κίνηση του δίσκου
$\dfrac{dL}{dt}_{(t=0)}=\Sigma\tau_{(K)}=I_{(K)}a_{γων_0} \Rightarrow \dfrac{dL}{dt}_{(t=0)}=\dfrac{1}{2}mR^2 a_{γων_0}$ και με αριθμητική αντικατάσταση
$\dfrac{dL}{dt}_{(t=0)}=π\dfrac{kg \cdot m^2}{s^2}$.

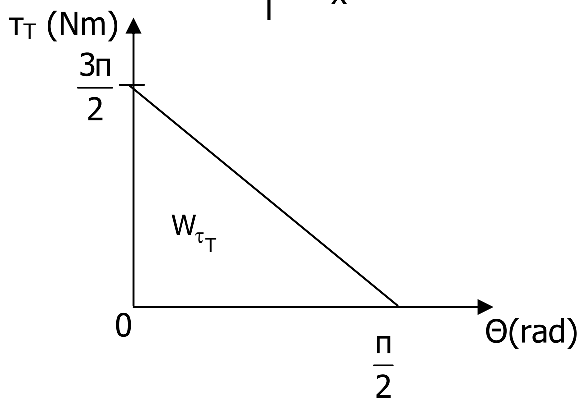
Γ. Η γωνιακή ταχύτητα γίνεται μέγιστη όταν ο δίσκος παύει να επιταχύνεται.
Δηλαδή $a_{γων}=0 \overset{(10)}{\Rightarrow} \hat{θ}=\dfrac{π}{2}rad$. Αυτή είναι η γωνία που θα έχει περιστραφεί ο δίσκος τη χρονική στιγμή που γίνεται μέγιστη η γωνιακή του ταχύτητα.

1ος τρόπος
Θεωρούμε ότι η κύλιση χωρίς ολίσθηση έχει αναλυθεί σε μία μεταφορική κίνηση που αντιπροσωπεύεται από την κίνηση του κέντρου μάζας του και σε μία στροφική κίνηση περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησής του. Εφαρμόζουμε το Θ.Ε.Ε για τη στροφική κίνηση του δίσκου και για γωνία στροφής $0 \le θ \le \dfrac{π}{2}rad$: $W_{\tau_T}-\left|W_{\tau_{T_{στ}}}\right|=\dfrac{1}{2}I_{(K)}\omega_{max}^2$ (11).

Οι ροπές της Τ και της $T_{στ}$ είναι μεταβλητού μέτρου και προκύπτουν από τις σχέσεις: $τ_T=(3π-6θ)R \Rightarrow$ $τ_T=\frac{3π}{2}-3θ$ (S.I) και $τ_{T_{στ}} \overset{(8)}{=} (π-θ)R \Rightarrow τ_{T_{στ}}=\frac{π}{2}-θ$ (S.I) και τα έργα τους υπολογίζονται γραφικά από τα αντίστοιχα διαγράμματα τ-θ:

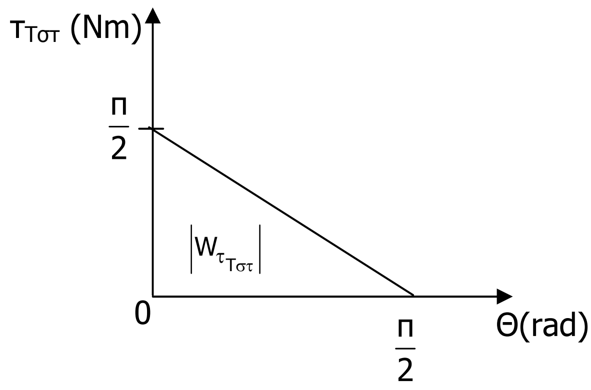


Θ(rad)	0	$\frac{π}{2}$
$τ_T$ (Nm)	$\frac{3π}{2}$	0



Διάγραμμα 1

Θ(rad)	0	$\frac{π}{2}$
$τ_{Tστ}$ (Nm)	$\frac{π}{2}$	0



Διάγραμμα 2

Από τα διαγράμματα (1) και (2) αντίστοιχα προκύπτουν:

$$W_{τ_{T_{0\to\frac{π}{2}}}}=\frac{1}{2}\frac{π}{2}\frac{3π}{2}=3{,}75J \quad (12)$$

$$\left|W_{τ_{Tστ_{0\to\frac{π}{2}}}}\right|=\frac{1}{2}\frac{π}{2}\frac{π}{2}=1{,}25J \quad (13)$$

Από (11) $\underset{(13)}{\overset{(12)}{\Rightarrow}}$ $3{,}75-1{,}25=\frac{1}{2}\frac{1}{2}4\frac{1}{4}ω^2_{max} \Rightarrow ω_{max}=\sqrt{10}$ rad/s=π rad/s

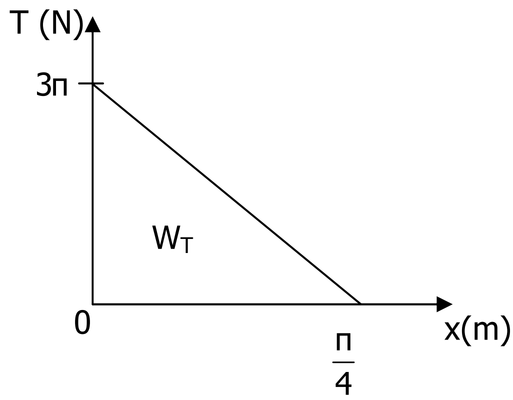
2^{ος} τρόπος

Εφαρμόζουμε το Θ.Ε.Ε για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου θεωρώντας ότι όλες οι δυνάμεις έχουν μεταφερθεί στο κέντρο μάζας Κ του δίσκου. Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η μετατόπιση x του κέντρου μάζας συνδέεται με τη γωνία στροφής του θ με τη σχέση: $x=\hat{\theta}R$. Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής οι εκφράσεις (2) και (8) μας δίνουν αντίστοιχα τα μέτρα των δυνάμεων Τ και $T_{στ}$ σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του κέντρου μάζας: Τ=3π-12x (S.I) και $T_{στ}$=π-4x (S.I) με $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ m

$$W_T + W_{Tστ}=\frac{1}{2}m\upsilon^2_{cmmax} \quad (14).$$

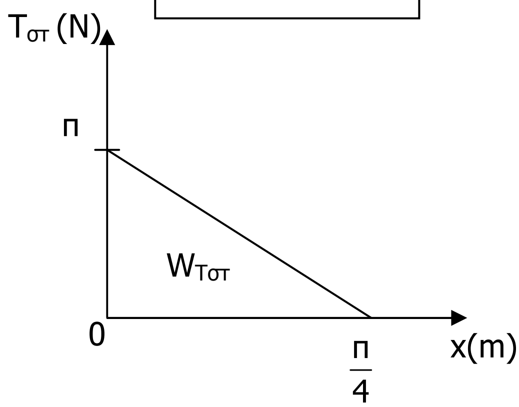
Τα έργα των δυνάμεων Τ και $T_{στ}$ υπολογίζονται γραφικά από τα διαγράμματα Τ-x και $T_{στ}$-x.

x(m)	0	$\frac{\pi}{4}$
T (N)	3π	0



Διάγραμμα 3

x(m)	0	$\frac{\pi}{4}$
$T_{στ}$ (N)	π	0



Διάγραμμα 4

Από τα διαγράμματα (3) και (4) αντίστοιχα προκύπτουν:

$$W_{T_{0\to\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}3\pi=3{,}75J \quad (15)$$

$$W_{Tστ_{0\to\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{2}\pi\frac{\pi}{4}=1{,}25J \quad (16)$$

Από (14) $\overset{(15)}{\underset{(16)}{\Rightarrow}}$ 3,75+1,25=$\frac{1}{2}4m\upsilon^2_{cm\,max}$ $\Rightarrow$ υ_{cmax}= $\sqrt{2,5}$ m/s$\Rightarrow$ $\omega_{max}R$= $\sqrt{2,5}$

$\Rightarrow\omega_{max}$= $\sqrt{10}$ rad/s=π rad/s

3^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την κύλιση χωρίς ολίσθηση ως μία σύνθετη κίνηση και εφαρμόζουμε το Θ.Ε.Ε για γωνία στροφής $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$rad:

W_T+ $W_{T\sigma\tau}$=$\frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm\,max}$ $+\frac{1}{2}I_{(K)}\omega^2_{max}$, όμως το έργο της $T_{\sigma\tau}$ είναι μηδέν $W_{T\sigma\tau}$=0. Άρα

W_T=$\frac{1}{2}m\omega^2_{max}R^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2_{max}\Rightarrow W_T$=$\frac{3}{4}m\omega^2_{max}R^2$(17).

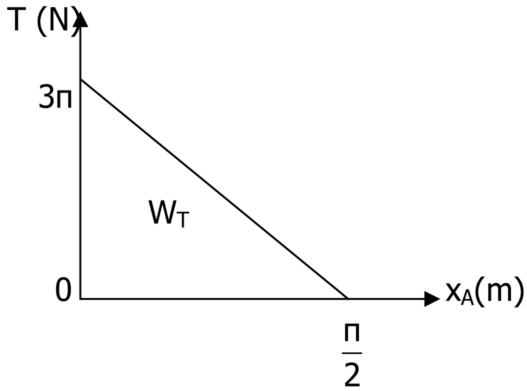
Όμως το σημείο εφαρμογής Α της T κάθε στιγμή έχει ταχύτητα $\upsilon_A=\upsilon_{CM}+\upsilon_\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\upsilon_A=2\upsilon_{CM}$ διότι για την επιτρόχιο ταχύτητα υ_ε λόγω της στροφικής κίνησης ισχύει $\upsilon_\varepsilon=\upsilon_{CM}$. Άρα $\frac{dx_A}{dt}=2\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx_A=2dx$ δηλαδή το σημείο Α μετατοπίζεται κατά x_A=2x =2θR,

όταν το κέντρο μάζας μετατοπίζεται κατά x.Με τη βοήθεια της σχέσης θ= $\frac{x_A}{2R}$ η (2)

δίνει T=3π-6x_A (S.I) με 0≤ x_A≤$\frac{\pi}{2}$m

Το έργο της δύναμης T υπολογίζεται γραφικά από το διάγραμμα T-x_A.

X_A (m)	0	$\frac{\pi}{2}$
T (N)	3π	0



Διάγραμμα 5

Από το διάγραμμα (5) προκύπτει: $W_{T_{0\to\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{2}3\pi\frac{\pi}{2}$=7,5 J (18). Από (17)$\overset{(18)}{\Rightarrow}$

ω_{max}= $\sqrt{10}$ rad/s=π rad/s.

$4^{ος}$ τρόπος

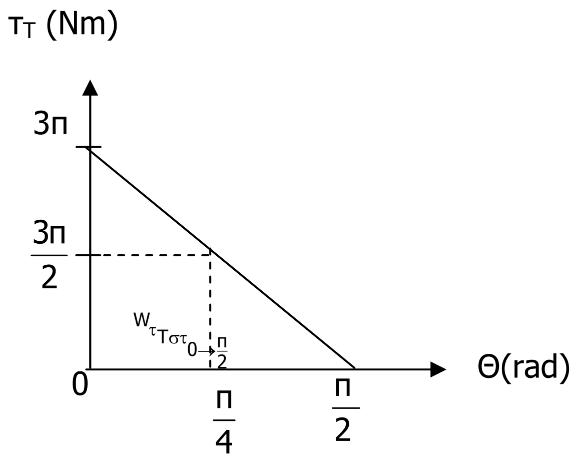
Ο δίσκος εκτελεί μία μόνο στροφική κίνηση περί "στιγμιαία" ακίνητο άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής Γ του δίσκου με το επίπεδο κύλισης και είναι κάθετος σε αυτόν. Εφαρμόζουμε πάλι το Θ.Ε.Ε :

$W_{\tau_{T_{0\to\frac{\pi}{2}}}} + W_{\tau_{T\sigma\tau_{0\to\frac{\pi}{2}}}} = W_{T_{T_{\sigma\tau}}}$.Αλλά $W_{\tau_{T\sigma\tau_{0\to\frac{\pi}{2}}}}$ =0 και με εφαρμογή του Θεωρήματος Steiner : $I_{(\Gamma)} = I_{(K)} + MR^2 \Rightarrow I_{(\Gamma)} = \frac{3}{2}mR^2$.Άρα $W_{\tau_{T_{0\to\frac{\pi}{2}}}} = \frac{3}{4}mR^2\,\omega_{max}^2$ (19)

Η έκφραση της ροπής της Τ ως προς το σημείο Γ είναι: $\tau_{T_{(\Gamma)}} = T\,2R \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\tau_{T_{(\Gamma)}}$ =3π- 6θ (S.I) και το έργο της υπολογίζεται γραφικά:

Θ(rad)	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tau_{T_{(\Gamma)}}$ (Nm)	3π	$\frac{3\pi}{2}$	0



Διάγραμμα 6

Από το διάγραμμα (6) προκύπτει :

$W_{\tau_{T_{0\to\frac{\pi}{2}}}} = \frac{1}{3}3\pi\frac{\pi}{2}$ =7,5 J (20).Από (19) $\overset{(20)}{\Rightarrow}$ $\omega_{max} = \sqrt{10}$ rad/s=π rad/s.

$Δ_1$.Ο ρυθμός παραγωγής έργου από τη δύναμη F (στιγμιαία ισχύς) είναι:

$\frac{dW_F}{dt} = Fu_A \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = F2u_{cm} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = 2F\omega R$ (21).Η στιγμιαία τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω όταν ο δίσκος έχει στραφεί κατά γωνία $\hat{\theta} = \frac{\pi}{4}$ rad υπολογίζεται με εφαρμογή του Θ.Ε.Ε: $W_{\tau_{T_{0\to\frac{\pi}{4}}}} = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$ (22).

Από το διάγραμμα (6) προκύπτει: $W_{\tau_{T_{0\to\frac{\pi}{4}}}} = \frac{1}{2}(3\pi + \frac{3\pi}{2})\frac{\pi}{4}$ =5,625 J (23).

Από (22) $\overset{(23)}{\Rightarrow}$ $5{,}625 = \frac{3}{4}4\frac{1}{4}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{7{,}5}$ rad/s.(24). Από (21) $\underset{\hat{\theta}=\frac{\pi}{4}}{\overset{(24)}{\Rightarrow}}$

$\frac{dW_F}{dt} = (3\pi - 6\frac{\pi}{4})\sqrt{7{,}5} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = 1{,}5\pi\sqrt{7{,}5} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = 7{,}5\sqrt{3}$ J/s (25)

Δ₂. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μεταφορικής κίνησης στην οποία αναλύθηκε η σύνθετη κίνηση είναι : $\frac{dK_\mu}{dt} = \Sigma F\, \upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK_\mu}{dt} = m a_{cm}\, \upsilon_{cm} \Rightarrow$

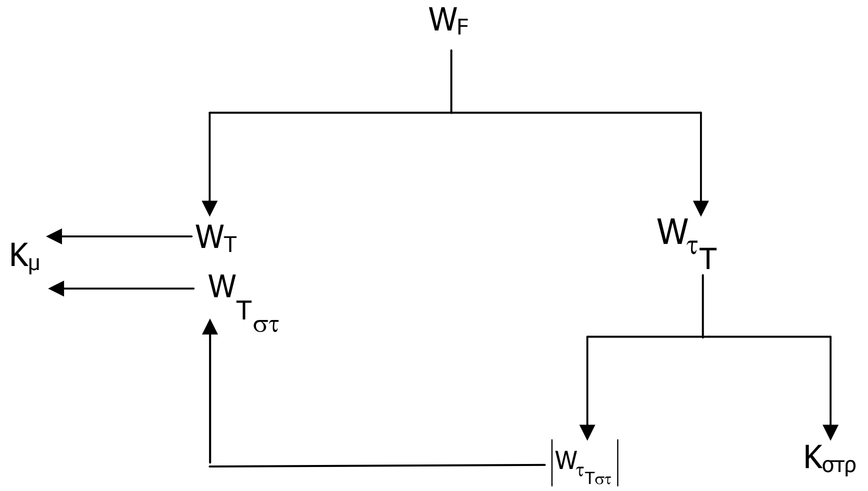
$$\frac{dK_\mu}{dt} = m a_{cm} \omega R \overset{(9)}{\Rightarrow} \frac{dK_\mu}{dt} = m(\pi-2\theta)\omega R \underset{(24)}{\overset{\hat{\theta}=\frac{\pi}{4}}{\Rightarrow}} \frac{dK_\mu}{dt} = 4\frac{\pi}{2}\sqrt{7,5}\,\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dK_\mu}{dt} = 5\sqrt{3} \text{ J/s (26).}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της στροφικής κίνησης περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι : $\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \Sigma\tau_{(K)}\omega \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = I_{(K)}\, a_{\gamma\omega\nu}\omega \overset{(10)}{\Rightarrow}$

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{1}{2} I_{(\Gamma)}\omega^2 (2\pi-4\theta)\omega \underset{(24)}{\overset{\hat{\theta}=\frac{\pi}{4}}{\Rightarrow}} \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{1}{2}4\frac{1}{4}\pi\sqrt{7,5} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = 2,5\sqrt{3} \text{ J/s (27).}$$

Δ₃. Άν θεωρήσουμε ότι η κύλιση χωρίς ολίσθηση αναλύεται σε μία μεταφορική κίνηση που περιγράφεται με την κίνηση του κέντρου μάζας και μία στροφική κίνηση περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, τότε οι ενεργειακοί μετασχηματισμοί μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

Η ενέργεια που προσφέρεται στο δίσκο μέσω του έργου της F (W_F), αφ᾽ ενός μεν μετατρέπεται μέσω του έργου της T(W_T) σε κινητική ενέργεια της μεταφορικής κίνησης,αφ᾽ετέρου δε μέσω του έργου της ροπής της T (W_{τ_T}) μετατρέπεται κατά ένα μέρος της σε κινητική ενέργεια της στροφικής κίνησης και το υπόλοιπο καταναλώνεται ως έργο της ροπής της $T_{\sigma\tau}$ ($W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}}$) η οποία αντιτίθεται στην στροφική κίνηση του δίσκου. Αυτό το ίδιο ποσό ενέργειας αποδίδεται μέσω του έργου της $T_{\sigma\tau}$ ($W_{T_{\sigma\tau}}$) ως κινητική ενέργεια στην μεταφορική κίνηση.Σχηματικά τα προηγούμενα αποδίδονται ως εξής:



Αθροιστικά για τις δύο κινήσεις έχουμε: $W_T + W_{T_{\sigma\tau}} - \left|W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}}\right| + W_{\tau_T} = K_\mu + K_{\sigma\tau\rho}$

$\Rightarrow W_T + W_{\tau_T} = K_\mu + K_{\sigma\tau\rho}$ η σχέση αυτή αποτελεί την έκφραση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας η οποία τη χρονική στιγμή που ο δίσκος έχει στραφεί κατά γωνία $\hat{\theta} = \frac{\pi}{4}$ rad μπορεί να μετατραπεί σε Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στην μονάδα του χρόνου (Αρχή Διατήρησης της Ισχύος) ως εξής:

$$\frac{dW_T}{dt} + \frac{dW_{\tau_T}}{dt} = \frac{dK_\mu}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} \Rightarrow T\upsilon_{cm} + \tau_T\,\omega = \frac{dK_\mu}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} \Rightarrow$$

$$T\omega R + TR\omega = \frac{dK_\mu}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} \overset{(2)}{\Rightarrow} 2(3\pi - 6\theta)\omega R = \frac{dK_\mu}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} \underset{(24)}{\overset{\hat{\theta}=\frac{\pi}{4}}{\Rightarrow}}$$

$$7{,}5\sqrt{3}\ \text{J/s} = \frac{dK_\mu}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} \underset{(27)}{\overset{(26)}{\Rightarrow}} \quad 7{,}5\sqrt{3}\ \text{J/s} = 5\sqrt{3}\ \text{J/s} + 2{,}5\sqrt{3}\ \text{J/s}.$$

Απλούστερα, για τη στροφική κίνηση περί άξονα που διέρχεται από το Γ, η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας δίνει : $W_{\tau_T} = K_{\sigma\tau\rho(\Gamma)} \Rightarrow \frac{dW_{\tau_T}}{dt} = \frac{dK_{\sigma\tau\rho(\Gamma)}}{dt} \Rightarrow$

$$T\,2R\,\omega = \frac{dK_{\sigma\tau\rho(\Gamma)}}{dt} \Rightarrow T\,2R\,\omega = \frac{dK_{\sigma\tau\rho(\Gamma)}}{dt} \Rightarrow T\,2R\,\omega = \left(\frac{1}{2}I_{(\Gamma)}\omega^2\right)' \Rightarrow$$

$T\,2R\,\omega = I_{(\Gamma)}\omega a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T\,2R = I_{(\Gamma)}a_{\gamma\omega\nu}$ η τελευταία σχέση αποτελεί την έκφραση του Θεμελιώδους Νόμου της Μηχανικής για την στροφική κίνηση του δίσκου περί άξονα που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετος στο δίσκο. Σχηματικά:

$$W_F \longrightarrow W_{\tau_T} \longrightarrow K_{\sigma\tau\rho_{(\Gamma)}}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο αναλυτικός υπολογισμός του έργου της ροπής της $T_{\sigma\tau}$, $W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}}$ στον 1ο τρόπο και τον υπολογισμό του έργου της Τ, W_T στον 2ο τρόπο, μπορεί να αποφευχθεί ως εξής : Το έργο της ροπής της Τ γράφεται $W_{\tau_T} = \sum_0^\theta \Delta W_{\tau_T} \Rightarrow$

$$W_{\tau_T} = \sum_0^\theta \tau_T\,\Delta\theta \Rightarrow W_{\tau_T} = \sum_0^\theta T\,R\,\Delta\theta \Rightarrow W_{\tau_T} = R\sum_0^\theta T\,\Delta\theta\ (1)$$

Το έργο της ροπής της $T_{\sigma\tau}$ αντίστοιχα γράφεται

$$W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} = \sum_0^\theta \Delta W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} \Rightarrow W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} = \sum_0^\theta \tau_{T_{\sigma\tau}}\,\Delta\theta \Rightarrow W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} = \sum_0^\theta T_{\sigma\tau}\,R\,\Delta\theta \Rightarrow$$

$W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} = R\sum_0^\theta T_{\sigma\tau}\,\Delta\theta \overset{(8\alpha)}{\Rightarrow} W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} = R\sum_0^\theta \frac{T}{3}\,\Delta\theta \Rightarrow W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} = \frac{R}{3}\sum_0^\theta T\,\Delta\theta$ (2).Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2): $\frac{W_{\tau_T}}{W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}}} = 3 \Rightarrow W_{\tau_{T_{\sigma\tau}}} = \frac{1}{3}W_{\tau_T}$. Η διαδικασία αυτή μπορεί να θεωρηθεί το "μηχανικό ανάλογο" της διαδικασίας που ακολουθείται σε κυκλώματα που διαρρέονται από ρεύματα μεταβλητής έντασης όταν θέλουμε να επιμερίσουμε το συνολικό ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται λόγω φαινομένου

Joule στις επιμέρους αντιστάσεις R_1 και R_2 του κυκλώματος:

$$\frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}} = \frac{\sum\limits_0^t i^2 R_1 \Delta t}{\sum\limits_0^t i^2 R_2 \Delta t} \Rightarrow \frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}} = \frac{\sum\limits_0^t i^2 R_2 \Delta t}{\sum\limits_0^t i^2 R_2 \Delta t} \Rightarrow \frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}} = \frac{R_1 \sum\limits_0^t i^2 \Delta t}{R_2 \sum\limits_0^t i^2 \Delta t} \Rightarrow \frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}} = \frac{R_1}{R_2}.$$

2. Ο υπολογισμός των διαφόρων ενεργειακών ρυθμών μπορεί προφανώς να γίνει και με την χρήση παραγώγων. Στην παρουσίαση αυτή το αποφύγαμε προκειμένου να φανεί ο ρόλος των διαφόρων δυνάμεων και ροπών στους ενεργειακούς μετασχηματισμούς.

* Η ανάρτηση αυτή αφιερώνεται σ' όλους όσους μόχθησαν προσπαθώντας να διεκδικήσουν την εισαγωγή τους στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, σ' αυτούς που έχουν ακόμα ζωντανή τη φλόγα και πιστεύουν στην αυταξία των σπουδών. Συμπτωματικά έμαθα από το δίκτυο ότι στις φετινές εξετάσεις συμμετέχει και ο γιος του συναδέλφου Γ. Κυριακόπουλου. Μαζί με τις ευχές μου για επιτυχία τους αφιερώνω αυτή την ανάρτηση.

Ξ. Στεργιάδης