

ΘΕΜΑ 1^ο

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0, 4]$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ και ισχύουν: $f(2)=-2$, $f'(2)=0$ και $(f'(x))^2+f(x)f''(x)=-1$ (1) για κάθε $x \in (0, 4)$.

α. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$.

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι: $f(x) = -\sqrt{4x - x^2}$

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χώρου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(3, f(3))$ και τους ημιάξονες Ox και Oy .

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f η συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(1)=-4$ και $f(19)=8$. αν οι εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της f στα σημεία $A(1, -4)$ και $B(19, 8)$ είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι:

α. Υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (1, 19)$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{\rho'(\rho_1)} + \frac{1}{\rho'(\rho_2)} = 3$.

β. Υπάρχει $\xi \in (1, 19)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) = (f'(\xi))^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ 1ο**

α. Η f είναι συνεχής στο $(0, 4)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$ επειδή αν υπάρχει $\rho \in (0, 4)$ ώστε $f(\rho)=0$ από την (1) έχουμε: $(f'(\rho))^2 + f(\rho)f''(\rho) = -1 \Rightarrow (f'(\rho))^2 = -1$ άτοπο. Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0, 4)$ και επειδή $f(2)=-2 < 0$ ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$.

β. Ισχύει: $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = -1$ για κάθε $x \in (0, 4)$, δηλαδή $(f(x)f'(x))' = (-x)'$ για κάθε $x \in (0, 4)$.

Άρα υπάρχει $C_1 \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(x)f'(x) = -x + C_1$ για κάθε $x \in (0, 4)$.

Για $x=2$: $f(2)f'(2) = -2 + 4 \Rightarrow 0 = -2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2$.

Άρα $f(x)f'(x) = -x + 2 \Rightarrow 2f(x)f'(x) = -2x + 4$ άρα $(f^2(x))' = (-x^2 + 4x)'$ για κάθε $x \in (0, 4)$.

Άρα υπάρχει $C_2 \in \mathbb{R}$ ώστε: $f^2(x) = 4x - x^2 + C_2$ για κάθε $x \in (0, 4)$.

Για $x=2$: $f^2(2) = 8 - 4 + C_2 \Rightarrow 4 = 4 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$.

Άρα $f^2(x) = 4x - x^2$ για κάθε $x \in (0, 4)$ και επειδή $f(x) < 0$ ισχύει: $f(x) = -\sqrt{4x - x^2}$, $x \in (0, 4)$.

Η f είναι συνεχής στο 0 και στο 4 άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ και $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$.

Τελικά $f(x) = -\sqrt{4x - x^2}$, $x \in [0, 4]$.

Υ. Η γραφική παράσταση της F έχει εξίσωση

$$\psi = f(x) \Rightarrow \psi = -\sqrt{4x - x^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi^2 = 4x - x^2 \\ \psi \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 4x + 4 + \psi^2 = 4 \\ \psi \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (x-2)^2 + 4^2 = 2^2 \\ \psi \leq 0 \end{array} \right\}$$

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο K(2, 0) ακτίνα $\rho=2$ και $\psi \leq 0$.

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} \text{ άρα } f'(3) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, f(3) = -\sqrt{3}.$$

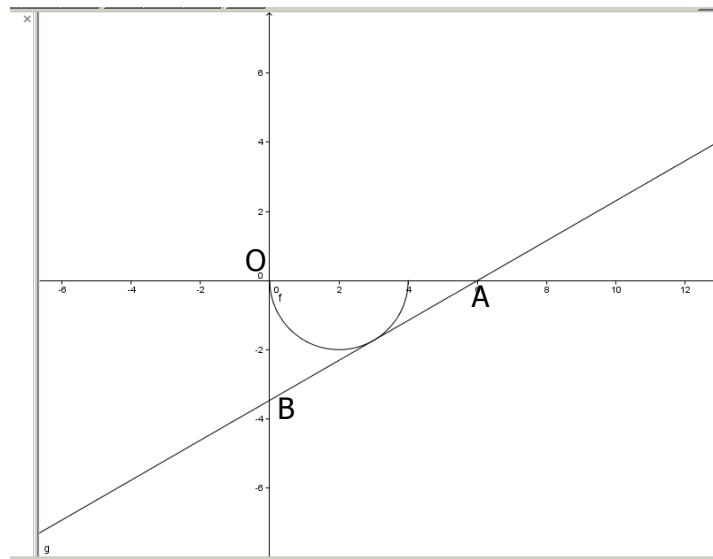
Άρα η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο (3, f(3)) έχει εξίσωση:

$$\psi + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) \Rightarrow \psi = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \quad (\epsilon).$$

Η ευθεία (ϵ) τέμνει τον OX στο A(6, 0) και τον οψ' στο (0, $-2\sqrt{3}$).

$$\text{Άρα το εμβαδόν του χωρίου } E = E_{\text{Τριγ}(OAB)} - E_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{1}{2}(OA)(OB) - \frac{1}{2}\pi\rho^2 = \frac{1}{2}6 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi \cdot 4 =$$

$$6\sqrt{2} - 2\pi = 2(3\sqrt{2} - \pi) \text{ τ.μ.}$$



ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι συνεχής στο $[1, 19]$ και $f(1) \neq f(19)$ επειδή $-4 \neq 8$. Το $2 \in (-4, 8)$ άρα από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\rho \in (1, 19)$ ώστε $f(\rho) = 2$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, \rho)$ άρα από το θεώρημα της μέσης

$$\text{τιμής υπάρχει } \rho_1 \in (1, \rho) \text{ ώστε: } f'(\rho_1) = \frac{f(\rho) - f(1)}{\rho - 1} \Rightarrow f'(\rho_1) = \frac{2 + 4}{\rho - 1} \text{ άρα } \frac{1}{f'(\rho_1)} = \frac{\rho - 1}{6} \quad (1).$$

$$\text{Όμοια υπάρχει } \rho_2 \in (\rho, 19) \text{ ώστε: } f'(\rho_2) = \frac{f(19) - f(\rho)}{19 - \rho} \Rightarrow f'(\rho_2) = \frac{8 - 2}{19 - \rho} \text{ άρα } \frac{1}{f'(\rho_2)} = \frac{19 - \rho}{6} \quad (2).$$

$$\text{Από (1) και (2): } \frac{1}{f'(p_1)} + \frac{1}{f'(p_2)} = \frac{19 - \rho + \rho - 1}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

β. Ισχύει: $f'(1) = f'(19) = 0$

Έστω συνάρτηση $g(x) = f'(x)e^{-f(x)}$

Η g είναι συνεχής στο $[1, 19]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 19)$ και $g'(x) = f''(x)e^{-f(x)} - f'(x)e^{-f(x)}f'(x) = e^{-f(x)}(f''(x) - (f'(x))^2)$

$g(1) = f'(1)e^{-f(1)} = 0$ και $g(19) = f'(19)e^{-f(19)} = 0$ δηλαδή $g(1) = g(19)$.

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 19)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi) - (f'(\xi))^2 = 0 \Rightarrow f''(\xi) = (f'(\xi))^2.$$

Επιμέλεια

Α. Ανδρέου