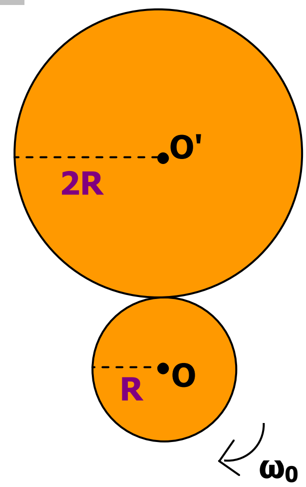
ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΔΙΣΚΟΙ & ΠΕΡΙ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

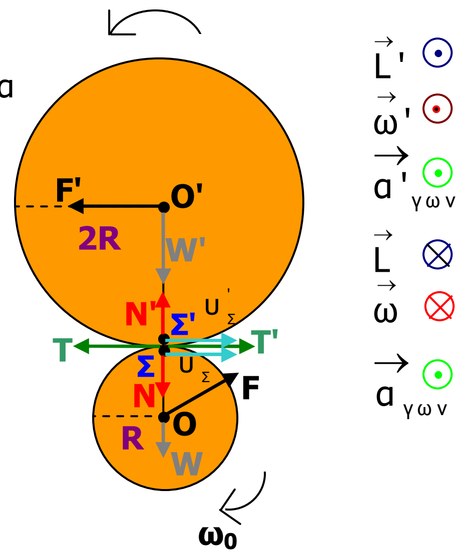


Ένας ομογενής και συμπαγής δίσκος μάζας m και ακτίνας R=0,2m στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0=1000 rad/sec. Ένας δεύτερος ομογενής και συμπαγής δίσκος από το ίδιο υλικό έχει το ίδιο πάχος με το πρώτο και διπλάσια ακτίνα. Αυτός ο δεύτερος δίσκος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο'. Κάποια στιγμή ο δεύτερος δίσκος που αρχικά δε στρέφεται φέρεται σε επαφή με τον πρώτο δίσκο και ταυτόχρονα ο άξονας περιστροφής του συγκρατείται σταθερός ώστε να μην μπορεί να μετατοπιστεί. Μεταξύ των δύο δίσκων υπάρχει συντελεστής τριβής μ=0,2. Θεωρώντας αμελητέα την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης του άξονα στο δίσκο κέντρου Ο', να υπολογιστούν:

α. Οι γωνιακές επιταχύνσεις $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και $\alpha'_{\gamma\omega\nu}$ των δύο δίσκων αντίστοιχα.
β. Ο χρόνος στον οποίο οι δύο δίσκοι θα αποκτήσουν σταθερές γωνιακές ταχύτητες.
γ. Οι (σταθερές) γωνιακές ταχύτητες ω και ω' που θα αποκτήσουν τελικά οι δύο δίσκοι.
δ. Η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος των δύο δίσκων, αν η μάζα του δίσκου κέντρου Ο είναι m=1kg.

Δίνονται η ροπή αδρανείας δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος σ' αυτόν $I=\frac{1}{2}mr^2$ και $g=10m/s^2$

ΛΥΣΗ



α. Για τις μάζες m και m' των δίσκων με κέντρα Ο και Ο' αντίστοιχα έχουμε: $m=d\,V \Rightarrow m=d\,\pi\,R^2\,h$ και $m'=d\,V' \Rightarrow m=d\,\pi\,(2R)^2\,h$, όπου d= η πυκνότητα των δίσκων και h= το πάχος τους. Με διαίρεση κατά μέλη έχουμε: $\frac{m}{m'}=\frac{1}{4}\Rightarrow m'=4m$ (1).

Όταν οι δύο δίσκοι έρθουν σε επαφή δέχονται την επίδραση των εξής δυνάμεων: στον αρχικά στρεφόμενο δίσκο κέντρου Ο ασκούνται η δύναμη του βάρους του $\vec{W}$, η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από τον δίσκο κέντρου Ο', η δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα και σύμφωνα με τη φορά περιστροφής που θεωρήσαμε στο σχήμα γι' αυτόν η δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{T}$ με φορά προς τα αριστερά στο σημείο επαφής του Σ με τον δίσκο κέντρου Ο'.

Στον δίσκο κέντρου Ο' ασκούνται η δύναμη του βάρους του $\vec{W}'$, η κάθετη αντίδραση $\vec{N}'$ από το δίσκο κέντρου Ο, η οριζόντια δύναμη $\vec{F}'$ από τον άξονα και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}'$ με φορά προς τα δεξιά στο σημείο επαφής του Σ' με τον δίσκο κέντρου Ο.

Για τις εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος των δύο δίσκων ισχύει $\vec{N}=-\vec{N}'$ και $\vec{T}=-\vec{T}'$ και επειδή ο δίσκος κέντρου Ο' δεν κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση $\vec{W}'=-\vec{N}'\Rightarrow N'=W'\overset{(1)}{\Rightarrow}$ N'=N=4mg (2).

Εφαρμόζουμε τον Θ.Ν.Μ για την στροφική κίνηση του αρχικά στρεφόμενου δίσκου κέντρου Ο και για τα μέτρα των διανυσματικών μεγεθών έχουμε: $\Sigma\tau_{(O)}=I_{(O)}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow TR=\frac{1}{2}mR^2\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$

$\mu N=\frac{1}{2}mR\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\overset{(2)}{\Rightarrow}\ \mu 4mg=\frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\ \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{8\mu g}{R}\ \Rightarrow\ \alpha_{\gamma\omega\nu}=80rad/s^2$ (3).

Εφαρμόζουμε τον Θ.Ν.Μ για την στροφική κίνηση του αρχικά ακίνητου κυλίνδρου κέντρου Ο' και για τα μέτρα των διανυσματικών μεγεθών έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(O')}=I_{(O')}\alpha'_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T'2R=\frac{1}{2}4m4R^2\alpha'_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow \mu N'=4mR\alpha'_{\gamma\omega\nu}\overset{(2)}{\Rightarrow}\mu 4mg=4mR\alpha'_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$$

$$\alpha'_{\gamma\omega\nu}=\frac{\mu g}{R}\ \Rightarrow\ \alpha'_{\gamma\omega\nu}=10rad/s^2\ \ (4).$$

β. Όπως προκύπτει από τις σχέσεις (3) και (4) οι γωνιακές επιταχύνσεις $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και $\alpha'_{\gamma\omega\nu}$ είναι σταθερές. Άρα ο δίσκος κέντρου (Ο) εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) στροφική κίνηση και ο δίσκος κέντρου (Ο') εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) στροφική κίνηση. Οι δύο δίσκοι θα αποκτήσουν σταθερές γωνιακές ταχύτητες όταν δεν ολισθαίνουν ο ένας ως προς τον άλλον δηλαδή τα σημεία επαφής τους Σ και Σ' έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα $\Rightarrow \upsilon_\Sigma=\upsilon_{\Sigma'}\Rightarrow$

$$\omega R=\omega' 2R\Rightarrow \omega_0-\alpha_{\gamma\omega\nu}t=2\alpha'_{\gamma\omega\nu}t\ \underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}}\ \omega_0-\frac{8\mu g}{R}t=2\frac{\mu g}{R}t\Rightarrow \omega_0=\frac{10\mu g t}{R}\Rightarrow t=\frac{\omega_0 R}{10\mu g}\Rightarrow t=\frac{1000\cdot 0,2}{10\cdot 0,2\cdot 10}$$

$$\Rightarrow t=10s\ \ (5).$$

γ. Για τον δίσκο κέντρου Ο: $\omega=\omega_0-\alpha_{\gamma\omega\nu}t\underset{(3)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}}\omega=\omega_0-\frac{8\mu g}{R}\frac{\omega_0 R}{10\mu g}\Rightarrow \omega=\frac{\omega_0}{5}=200\ \ rad/s$.

Για τον δίσκο κέντρου Ο': $\omega=\alpha'_{\gamma\omega\nu}t\underset{(4)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}}\omega'=\frac{\mu g}{R}\frac{\omega_0 R}{10\mu g}\Rightarrow \omega'=\frac{\omega}{10}=100\ \ rad/s$.

δ. Επειδή τα διανύσματα των στροφορμών των δύο δίσκων είναι συγγραμμικά, η διανυσματική μεταβολή $\Delta\vec{L}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda_{\sigma\upsilon\sigma}}-\vec{L}_{\alpha\rho\chi_{\sigma\upsilon\sigma}}$ μετατρέπεται σε αλγεβρική μεταβολή και θεωρώντας θετικές τις στροφορμές που έχουν φορά $\otimes$

$$\Delta L=L_{\tau\varepsilon\lambda_{\sigma\upsilon\sigma}}-L_{\alpha\rho\chi_{\sigma\upsilon\sigma}}\Rightarrow \Delta L=I\omega-I'\omega'-I\omega_0\Rightarrow\ \Delta L=\frac{1}{2}mR^2\omega-\frac{1}{2}4m4R^2\omega'-\frac{1}{2}mR^2\omega_0\Rightarrow$$

$$\Delta L=\frac{1}{2}mR^2(\omega-16\omega'-\omega_0)\Rightarrow\ \Delta L=\frac{1}{2}1\cdot 0,2^2(200-16\cdot 100-1000)\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}}$$

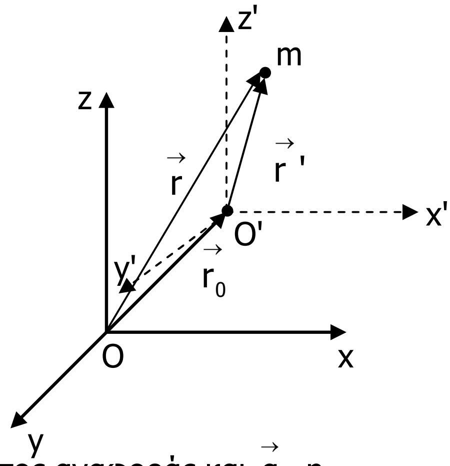
$$\Delta L=-\frac{1}{2}4\cdot 10^{-2}(2400)=-48kgm^2/s.$$

* Το ερώτημα διευκρινίζεται αναλυτικά στο "**Περί Στροφορμής ο Λόγος**" (2).

Περί Στροφορμής ο Λόγος

1. Ο ορισμός της Στροφορμής υλικού σημείου $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m\vec{r}\times\vec{\upsilon}$ όπως αναφέρεται στο "εκτός ύλης" ένθετο στου Σχολικού Βιβλίου (σελ. 147) αλλά και όπως αυτός παρουσιάζεται στη σελίδα 122 πρέπει να τονιστεί ότι δίνεται χωρίς να αναφέρεται ότι το σημείο Ο ως προς το οποίο ορίζεται το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του υλικού σημείου είναι η αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων <u>ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς</u>. Η Στροφορμή υλικού σημείου μπορεί να οριστεί και ως προς ένα μη αδρανειακό (επιταχυνόμενο) σύστημα αναφοράς αλλά η έκφρασή της τότε τροποποιείται. Ας θυμηθούμε ότι ο δεύτερος νόμος του Newton γράφεται $\Sigma\vec{F}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ (1) όταν m= σταθερή και η ταχύτητα $\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ υπολογίζεται με βάση το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του υλικού σημείου σε σχέση με την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η σχέση (1) τροποποιείται εάν εκφραστεί ως προς ένα σύστημα o'x'y'z' που διατηρεί τους άξονές του παράλληλους προς τους αντίστοιχούς τους του αδρανειακού συστήματος οxyz αλλά επιταχύνεται ως προς αυτό και η αρχή του Ο' έχει

διάνυσμα θέσης $\vec{r}_0$ ως προς το O. Αν $\vec{\upsilon}'$ = η ταχύτητα του υλικού σημείου ως προς το επιταχυνόμενο σύστημα συντεταγμένων:



$$\Sigma\vec{F}=m\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt}\Rightarrow\Sigma\vec{F}=m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)\Rightarrow\Sigma\vec{F}=m\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(\vec{r}-\vec{r}_0)\right]\Rightarrow$$

$$\Sigma\vec{F}=m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)-m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right)\Rightarrow\Sigma\vec{F}=m\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}\right)-m\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_0\right)\Rightarrow$$

$\Sigma\vec{F}=m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}-m\vec{a}_0$ όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του υλικού σημείου ως προς το σύστημα συντεταγμένων οxyz του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και $\vec{a}_0$ η επιτάχυνση αντίστοιχα της αρχής O' του επιταχυνόμενου συστήματος συντεταγμένων ως προς το σύστημα συντεταγμένων του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Δηλαδή η έκφραση του δεύτερου νόμου τροποποιείται.

Αντίστοιχα η στροφορμή $\vec{L}'$ ως προς ένα <u>μη αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων</u> o'x'y'z' θα είναι: $\vec{L}'=\vec{r}'\,x\,m\vec{\upsilon}'$ όπου $\vec{r}'$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου ως προς την αρχή O' ενός επιταχυνόμενου συστήματος συντεταγμένων και $\vec{\upsilon}'$ η ταχύτητά του ως προς αυτό.

$\vec{L}'=\vec{r}'\,x\,m\vec{\upsilon}'\Rightarrow\vec{L}'=(\vec{r}-\vec{r}_0)\;x\;m(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_0)\Rightarrow\vec{L}'=m\vec{r}\;x\;\vec{\upsilon}-m\vec{r}\;x\;\vec{\upsilon}_0-m\vec{r}_0\;x\;\vec{\upsilon}+m\vec{r}_0\;x\;\vec{\upsilon}_0$ (1).

Αντίστοιχα η γενικευμένη μορφή του Θ.Ν.Μ για τη στροφική κίνηση στο σύστημα συντεταγμένων οxyz του αδρανειακού συστήματος αναφοράς $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O)}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ στο επιταχυνόμενο σύστημα συντεταγμένων o'x'y'z' τροποποιείται ως εξής:

$$\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}\overset{(1)}{=}\frac{d}{dt}(m\vec{r}\,x\,\vec{\upsilon})-\frac{d}{dt}(m\vec{r}\,x\,\vec{\upsilon}_0)-\frac{d}{dt}(m\vec{r}_0\,x\,\vec{\upsilon})+\frac{d}{dt}(m\vec{r}_0\,x\,\vec{\upsilon}_0)\Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}=m\frac{d\vec{r}}{dt}x\vec{\upsilon}+m\vec{r}\,x\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-m\frac{d\vec{r}}{dt}x\vec{\upsilon}_0-m\vec{r}\,x\frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt}-m\frac{d\vec{r}_0}{dt}x\vec{\upsilon}-m\vec{r}_0\,x\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+m\frac{d\vec{r}_0}{dt}x\vec{\upsilon}_0+m\vec{r}_0\,x\frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}=m\vec{\upsilon}\,x\,\vec{\upsilon}+m\vec{r}\,x\,\vec{a}-m\vec{\upsilon}\,x\,\vec{\upsilon}_0-m\vec{r}\,x\,\vec{a}_0-m\vec{\upsilon}_0\,x\,\vec{\upsilon}-m\vec{r}_0\,x\,\vec{a}+m\vec{\upsilon}_0\,x\,\vec{\upsilon}_0+m\vec{r}_0\,x\,\vec{a}_0$$

Όπου $\vec{a}$ = η επιτάχυνση του υλικού σημείου ως προς το σύστημα συντεταγμένων οxyz του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και $\vec{a}_0$ = η επιτάχυνση της αρχής O' του επιταχυνόμενου συστήματος συντεταγμένων o'x'y'z' ως προς την αρχή O του αδρανειακού συστήματος οxyz.

Επειδή $m\vec{\upsilon}\,x\,\vec{\upsilon}=0$ και $m\vec{\upsilon}_0\,x\,\vec{\upsilon}_0=0$ έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}=\vec{r}\,x\,m\vec{a}-m\vec{\upsilon}\,x\,\vec{\upsilon}_0-\vec{r}\,x\,m\vec{a}_0+m\vec{\upsilon}\,x\,\vec{\upsilon}_0-\vec{r}_0\,x\,m\vec{a}+\vec{r}_0\,x\,m\vec{a}_0\Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}=\vec{r}\,x\,m\vec{a}-\vec{r}_0\,x\,m\vec{a}-\vec{r}\,x\,m\vec{a}_0+\vec{r}_0\,x\,m\vec{a}_0\Rightarrow\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}=(\vec{r}-\vec{r}_0)x\,m\vec{a}-(\vec{r}-\vec{r}_0)x\,m\vec{a}_0\Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}=\vec{r}'\,x\,\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}-\vec{r}'\,x\,m\vec{a}_0\Rightarrow\frac{d\vec{L}'_{(O')}}{dt}=\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi(O')}-\vec{r}'\,x\,m\vec{a}_0$$

Διαπιστώνουμε ότι ο λόγος που εκφράζουμε τη στροφορμή υλικού σημείου και το Θ.Ν.Μ για τη στροφική κίνηση ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι ότι οι εκφράσεις

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}$ και $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ είναι πιο απλές άρα και πιο χρήσιμες.

Αφορμή για την αναφορά μου αυτή αποτελεί η άσκηση 4.71 σελ. 146 του Σχολικού βιβλίου όπου αναφέρεται «*…Κάποια στιγμή το τρενάκι αρχίζει να κινείται με ταχύτητα υ=8,4m/s. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα στρέφεται ο τροχός. …*»
Το αποτέλεσμα ($\omega_{\tau\rho o\chi}$=1,75 rad/s) προκύπτει με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής όπου οι στροφορμές για το τρενάκι και τον τροχό σιωπηρώς υπολογίζονται ως προς ακίνητο παρατηρητή παρά το γεγονός ότι από την εκφώνηση δεν προκύπτει ότι η ταχύτητα με την οποία αρχίζει να κινείται το τρενάκι είναι ως προς ακίνητο (αδρανειακό) παρατηρητή.
Σε άλλη περίπτωση αν θεωρηθεί ότι η ταχύτητα αυτή είναι ως προς τον τροχό η λύση αλλάζει:
(Α.Δ.ΣΤΡ.) $m(\upsilon_0 - \omega_{\tau\rho o\chi}R)R = I_{\tau\rho o\chi}\,\omega_{\tau\rho o\chi} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $\omega_{\tau\rho o\chi}$=1,4 rad/s.

2. Για τη στροφορμή συστήματος σωμάτων το σχολικό βιβλίο στη σελ. 123 γράφει «*Σε ένα σύστημα σωμάτων,* ***στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό διάνυσμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα****. Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι* **L₁, L₂..**, *η στροφορμή του συστήματος είναι* **L= L₁+ L₂+…**».
Εύλογα ο αναγνώστης συμπεραίνει ότι οι στροφορμές των σωμάτων – μελών δεν είναι απαραίτητα υπολογισμένες **κατά τον ίδιο άξονα περιστροφής**.

Σχετικά με τη γενικευμένη διατύπωση του Θεμελιώδους Νόμου της στροφικής κίνησης $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$ το σχολικό βιβλίο στη σελίδα 124 γράφει «*Ο νόμος αυτός ισχύει και σε σύστημα σωμάτων. Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.*
Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη (δράση – αντίδραση). ***Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες. Η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν****. Έτσι η σχέση 4.18 για σύστημα σωμάτων γράφεται* $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$ *όπου* $\tau_{\varepsilon\xi}$ *η ροπή μιας εξωτερικής δύναμης και L η στροφορμή του συστήματος*».
Ας έλθουμε τώρα στο **δ** ερώτημα της άσκησης με την οποία ξεκίνησε αυτή η ανάρτηση.
Η στροφορμή του συστήματος των δύο δίσκων μεταβάλλεται. Παρά το γεγονός ότι για το σύστημα των δύο δίσκων ισχύει $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$ διότι οι ροπές του βάρους $\vec{W}$, της $\vec{N}$ και της $\vec{F}$ ως προς το Ο είναι 0, ($\vec{\tau}_{W(O)} = 0$, $\vec{\tau}_{N_{(O)}}$ =0, $\vec{\tau}_{F(O)} = 0$) και αντίστοιχα οι ροπές του βάρους $\vec{W}'$ και της $\vec{N}'$ ως προς το Ο' είναι 0 ($\vec{\tau}_{W'_{(O')}} = 0$, $\vec{\tau}_{N'_{(O')}}$ =0, $\vec{\tau}_{F'_{(O')}} = 0$) η στροφορμή του συστήματος μεταβάλλεται διότι $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\sigma} \neq 0$. Δηλαδή αν και $\vec{T} = -\vec{T}'$ (δράση – αντίδραση) έχουμε ότι $\vec{\tau}_{T_{(O)}\,T(0)} \neq -\vec{\tau}_{T'_{(O')}}$ επειδή τα διανύσματα αυτών των ροπών είναι ομόρροπα και για τα μέτρα τους ισχύει $TR \neq T'2R$.
Παρατηρούμε δηλαδή ότι σε ένα σύστημα όπως εμείς το έχουμε ορίσει (των δύο δίσκων) η στροφορμή του μεταβάλλεται λόγω των ροπών εσωτερικών δυνάμεων που στην προκειμένη περίπτωση αν και οφείλονται σε δυνάμεις που έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης δεν αλληλοαναιρούνται διότι οι περιστροφές των δύο δίσκων **δεν γίνονται ως προς τον ίδιο άξονα**.
Ακόμη κι αν αντιπαρέλθουμε τον αδόκιμο όρο "ζεύγος" για τη "δράση – αντίδραση" που προκαλεί σύγχυση αφού μπορεί να εκληφθεί ότι αναφέρεται στο ιδιαίτερο σύστημα "ζεύγος δυνάμεων"

(όπου οι δυνάμεις που το αποτελούν ασκούνται στο ίδιο σώμα), η διατύπωση «*ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική*» προϋποθέτει ότι το «*οποιοδήποτε σημείο*» είναι **<u>το ίδιο</u>** για τις "δράση – αντίδραση". Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο αν τα σώματα – μέλη του συστήματος στρέφονται γύρω από διαφορετικούς άξονες.
Επομένως όταν εφαρμόζεται ο Θ.Ν.Μ για τη στροφική κίνηση στη γενικευμένη του μορφή

$\Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ σε σύστημα σωμάτων πρέπει ρητά να αναφέρεται ότι οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων και οι στροφορμές των σωμάτων – μελών του συστήματος υπολογίζονται ως **<u>προς το ίδιο σημείο</u> (κατά τον ίδιο άξονα).**

3. Ως εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής στο σχολικό βιβλίο (σελ. 125) αναφέρεται το παράδειγμα της αθλήτριας του καλλιτεχνικού πατινάζ που συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της μειώνει τη ροπή αδρανείας της και επομένως αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Το συμπέρασμα προκύπτει επειδή η τριβή των παγοπέδιλων με τον πάγο θεωρείται αμελητέα και οι εξωτερικές δυνάμεις του βάρους και της δύναμης που δέχεται από το έδαφος δεν έχουν ροπή κατά τον άξονα περιστροφής. Από τη σχέση $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ με $I_2 < I_1$ προκύπτει $\omega_2 > \omega_1$.
Ας παρακολουθήσουμε τον παρακάτω συλλογισμό ενός μαθητή/-τριας «*Εφόσον μεταβάλλεται (αυξάνεται) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της αθλήτριας δηλαδή έχουμε μεταβολή* $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ *πρέπει να υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση* $\alpha_{\gamma\omega\nu}$. *Τότε από τον Θ.Ν.Μ της στροφικής κίνησης με τη μορφή* $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ *προκύπτει ότι* $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} \neq 0$, *άρα η στροφορμή της αθλήτριας δεν πρέπει να διατηρείται σταθερή*».
Το λανθασμένο αυτό συμπέρασμα μπορεί να προκύψει εντελώς "φυσιολογικά" αφού στη σελίδα 119 του Σχολικού Βιβλίου πουθενά δεν αναφέρεται ή σχολιάζεται ότι η σχέση $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ισχύει με την προϋπόθεση ότι **I=σταθερή** σε πλήρη αντιστοιχία με το Θ.Ν.Μ στη μεταφορική κίνηση όπου

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ όταν **m= σταθερή**.

Οι συνέπειες είναι γνωστές με όσα συνέβησαν στο 4^{o} Θέμα των εξετάσεων του 2009 όπου επιχειρήθηκε να δοθεί "γρήγορη λύση" με εφαρμογή του Θ.Ν.Μ για σύστημα σωμάτων του οποίου η ροπή αδρανείας **δεν ήταν σταθερή**.

Επιμέλεια Ξ. Στεργιάδης