Η ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ (ΜΕ) ΟΛΙΣΘΗΣΗ & ΜΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ

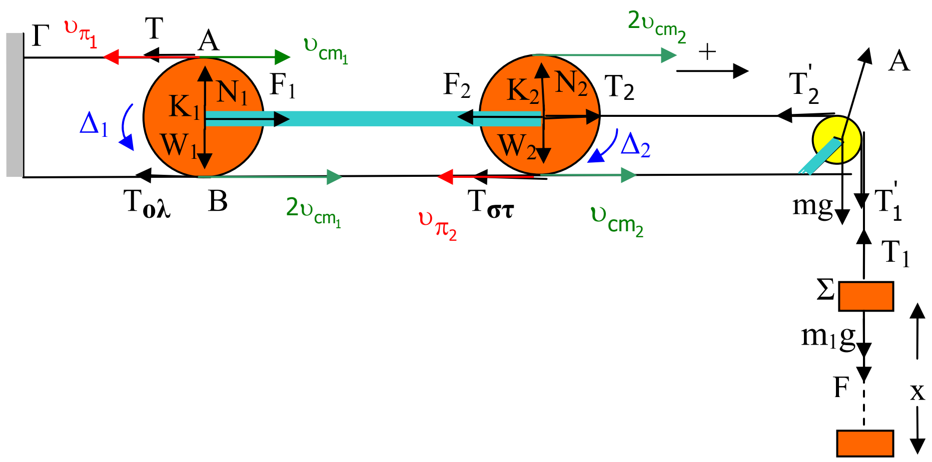
Ο Δίσκος $Δ_1$, μάζας M=2kg και ακτίνας R=0,2m , ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο τραπέζι με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5 και έχει στην περιφέρεια του τυλιγμένο αβαρές νήμα που έχει το ένα άκρο του ακλόνητα στερεωμένο στο σημείο Γ. Το νήμα μπορεί να ξετυλίγεται από το δίσκο $Δ_1$ χωρίς να ολισθαίνει. Το κέντρο μάζας K_1 του δίσκου $Δ_1$ συνδέεται με αβαρή ράβδο με το κέντρο K_2 ενός άλλου όμοιου δίσκου $Δ_2$ που έχει συνδεθεί μέσω αβαρούς νήματος με την περιφέρεια ακίνητης τροχαλίας μάζας m=1kg και ακτίνας r=0,1m. Στο άλλο άκρο του νήματος που δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, έχει συνδεθεί και ισορροπεί σώμα Σ μάζας m_1=1kg. Κάποια στιγμή ασκούμε στο σώμα κατακόρυφη δύναμη μέτρου F=25N με φορά προς τα κάτω. Εάν ο δίσκος $Δ_2$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει να υπολογιστούν τα μέτρα:

A_1. Της επιτάχυνσης των κέντρων μάζας K_1 και K_2 των δύο δίσκων.

A_2. Της γωνιακής επιτάχυνσης $α_{γων}$ της τροχαλίας.

A_3. Της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής $ω_2$ του δίσκου $Δ_2$ και της ταχύτητας $υ_B$ του σημείου επαφής B του Δίσκου $Δ_1$ με το τραπέζι όταν το σώμα Σ έχει κατέλθει κατά x=1m. Οι ροπές αδρανείας των δίσκων $Δ_1$, $Δ_2$ και της τροχαλίας ως προς τους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους και είναι κάθετοι στο επίπεδο τους, είναι αντίστοιχα: $I_{(K_1)} = I_{(K_2)} = \frac{1}{2}MR^2$ και $I_K = \frac{1}{2}mr^2$. Δίνεται ότι $g=10m/s^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



A_1. Στο δίσκο $Δ_1$ ασκούνται το βάρος του W_1, η δύναμη από το νήμα T, η δύναμη από τη ράβδο F_1, η κάθετη αντίδραση N_1 από το τραπέζι και η τριβή ολίσθησης $T_{ολ}$. Στο δίσκο $Δ_2$ το βάρος του W_2, η δύναμη από το νήμα T_2, η δύναμη από τη ράβδο F_2, η κάθετη αντίδραση N_2 από το τραπέζι και η στατική τριβή $T_{στ}$. Στην τροχαλία ασκούνται το βάρος της mg, η αντίδραση A και οι δυνάμεις T'_1 και T'_2 από τα νήματα. Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος του mg, η δύναμη από το νήμα T_1 και η δύναμη F. Επειδή τα νήματα και η ράβδος είναι αβαρή: $T_1 = T_1'$ (1), $T_2 = T_2'$ (2) και $F_1 = F_2$ (3). Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία: $α_1=α_ε=α_{cm_2}$ (4) και $α_ε=α_{γων}\cdot r = α_{cm_2}$ (5)

όπου $α_ε$ = η επιτρόχιος επιτάχυνση της τροχαλίας, $α_{γων}$= η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας, $α_1$= η επιτάχυνση του σώματος Σ και $α_{cm_2}$ = η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου $Δ_2$.

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (Θ.Ν.Μ.) για την κίνηση του σώματος Σ:

$F + m_1g - T_1 = m_1α_1 \overset{(4)}{\Rightarrow} F + m_1g - T_1 = m_1α_{cm_2}$ (6). Από το Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας:

$T_1'r - T_2'r = \frac{1}{2}mr^2α_{γων} \overset{(5)}{\Rightarrow} T_1' - T_2' = \frac{1}{2}mα_{cm_2}$ (7). Ο Δίσκος $Δ_2$ εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Από το Θ.Ν.Μ. για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου $Δ_2$: $T_2 - F_2 - T_{στ} = Mα_{cm_2}$ (8). Από το Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση του δίσκου $Δ_2$: $T_{στ}\cdot R = \frac{1}{2}MR^2α_{γων_2}$, αλλά $α_{cm_2} = α_{γων_2}R$ και τελικά

$T_{στ} = \frac{1}{2}Mα_{cm_2}$ (9). Για το Δίσκο $Δ_1$ έχουμε ότι: $υ_Γ = υ_A = 0$ δηλαδή για το σημείο A ισχύει:

$\upsilon_{cm_1} = \upsilon_{\Pi_1} = \omega_1 R \quad (10)$ και το σημείο Β: $\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\Pi_1} \overset{(10)}{\Rightarrow} \upsilon_B = 2\upsilon_{cm_1} \quad (11)$, όπου υ_{Π_1} =η γραμμική (επιτρόχιος) ταχύτητα της στροφικής κίνησης του δίσκου Δ_1.

Από (10): $\frac{d\upsilon_{cm_1}}{dt} = \frac{d\upsilon_{\Pi_1}}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}R \Rightarrow \alpha_{cm_1} = \alpha_{\varepsilon_1} = \alpha_{\gamma\omega\nu_1}R \quad (12)$.

Από το Θ.Ν.Μ. για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου Δ_1: $F_1 - T_{o\lambda} - T = M\alpha_{cm_1} \quad (13)$.

Από το Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση του δίσκου Δ_1:

$$TR - T_{o\lambda}\cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu_1} \overset{(12)}{\Rightarrow} T - T_{o\lambda} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm_1} \quad (14).$$

Αθροίζουμε κατά μέλη τις (6), (7), (8), (9), (13),(14):

$$F + m_1 g - T_1 + T_1' - T_2' + T_2 - F_2 - T_{\sigma\tau} + T_{\sigma\tau} + F_1 - T_{o\lambda} - T + T - T_{o\lambda} =$$

$$= m_1\alpha_{cm_2} + \frac{1}{2}m\alpha_{cm_2} + M\alpha_{cm_2} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm_2} + M\alpha_{cm_1} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm_1}$$

$\overset{(1),(2),(3)}{\Rightarrow} F + m_1 g - 2T_{o\lambda} = m_1\alpha_{cm_2} + \frac{1}{2}m\alpha_{cm_2} + \frac{3}{2}M\alpha_{cm_2} + \frac{3}{2}M\alpha_{cm_1} \quad (15)$. Τα κέντρα μάζας K_1 και K_2 των δίσκων κινούνται με την ίδια επιτάχυνση καθώς αποτελούν και άκρα της αβαρούς ράβδου, άρα $\alpha_{cm_1} = \alpha_{cm_2} \quad (16)$ και $T_{o\lambda} = \mu N_2 \overset{N_2 = W_2}{\Rightarrow} T_{o\lambda} = \mu Mg \quad (17)$. Από $(15) \overset{(16),(17)}{\Rightarrow} \alpha_{cm_1} = \dfrac{F + m_1 g - 2\mu Mg}{\frac{1}{2}m + m_1 + 3M} \Rightarrow \alpha_{cm_1} = 2cm/s^2$. Άρα

$$\alpha_{cm_1} = \alpha_{cm_2} = 2m/s^2 \quad (18)$$

A₂. Από $(5) \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\alpha_{cm_2}}{r} \overset{(18)}{\Rightarrow} \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20rad/s^2$.

A₃. Για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του σώματος Σ: $\upsilon = \alpha_1 t \,(19)$ και $x = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \quad (20)$. Από (19) και (20): $\upsilon = \sqrt{2\alpha_1 x} \overset{(4),(18)}{\Rightarrow} \upsilon = 2m/s \quad (21)$.

Αλλά $\upsilon = \upsilon_{\varepsilon_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma}} = \upsilon_{cm_2} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{cm_2} \quad (22)$, όπου $\upsilon_{\varepsilon_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma}}$ =η γραμμική (επιτρόχιος) ταχύτητα της στροφικής κίνησης της τροχαλίας. Ο δίσκος Δ_2 εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση άρα $\upsilon_{cm_2} = \upsilon_{\Pi_2}$ (23) , όπου $\upsilon_{\Pi_2} =$ η γραμμική (επιτρόχιος) ταχύτητα της στροφικής κίνησης του δίσκου Δ_2.Από (22) και (23):

$$\upsilon = \upsilon_{\Pi_2} \Rightarrow \upsilon = \omega_2 \cdot R \Rightarrow \omega_2 = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega_2 = 10rad/s.$$

Επειδή $\upsilon_{cm_1} = \upsilon_{cm_2} \overset{(22)}{\Rightarrow} \upsilon_{cm_1} = \upsilon \overset{(21)}{\Rightarrow} \upsilon_{cm_1} = 2m/s \quad (24)$. Από $(11) \overset{(24)}{\Rightarrow} \upsilon_B = 4m/s$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Από τη μελέτη της κίνησης του δίσκου Δ_1 προκύπτει ότι όταν για τα σημεία της περιφέρειας ενός σώματος κυκλικής διατομής ισχύει η σχέση $\upsilon_{cm} = \upsilon_\Pi$ (δηλαδή η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης είναι κατά μέτρο ίση με τη γραμμική (επιτρόχιο) ταχύτητα της στροφικής κίνησης) **δεν έχουμε** απαραίτητα κύλιση χωρίς ολίσθηση. **Η συνθήκη δεν είναι ικανή.**
Αντίθετα όταν ένα σώμα κυκλικής διατομής -όπως ο δίσκος Δ_2- εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση τότε για τα σημεία της περιφέρειας του ισχύει **οπωσδήποτε** η σχέση $\upsilon_{cm} = \upsilon_\Pi$. **Η συνθήκη είναι αναγκαία.**
2. Η συνθήκη $\upsilon_{cm} = \upsilon_\Pi = \omega R$ αποτελεί την **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να εκτελεί ένα σώμα κύλιση χωρίς ολίσθηση όταν ικανοποιείται αποκλειστικά από τις αντιθέτου φοράς ταχύτητες του σημείου (ή των σημείων) επαφής του σώματος με το επίπεδο κύλισης.

Ξ. ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ