Η ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ – ΤΟ ΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ & Η ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ομογενής και συμπαγής τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε ακίνητο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $υ_{cm}$.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που συνδέει το σημείο επαφής Α του τροχού με το επίπεδο κύλισης και ένα τυχαίο σημείο Σ της περιφέρειας του κυλιόμενου τροχού (και όχι μόνο της περιφέρειας) είναι κάθετη στην ολική ταχύτητα αυτού του σημείου.

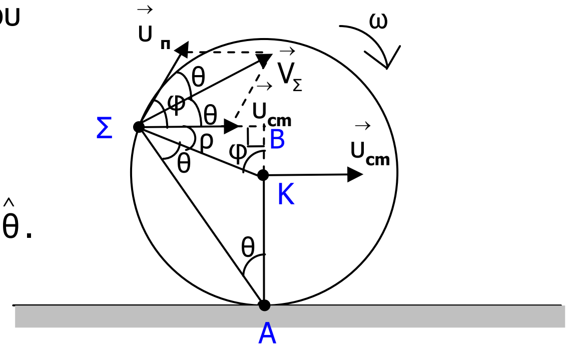
β. Να υπολογίσετε την έκφραση του μέτρου της ολικής ταχύτητας του σημείου Α της περιφέρειας του τροχού που τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο κύλισης σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της κυκλοειδούς τροχιάς που διαγράφει το σημείο επαφής του τροχού Α με το επίπεδο κύλισης σε χρόνο μιας περιόδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Έστω Σ ένα τυχαίο σημείο της περιφέρειας του κυλιόμενου χωρίς ολίσθηση τροχού. Αν $V_Σ$ είναι η ολική ταχύτητα του σημείου Σ, $υ_{cm}$ η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης και $υ_Π$ η γραμμική (επιτρόχιος) ταχύτητα του σημείου Σ λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού, τότε:

1ος τρόπος



Η γωνία $Σ\hat{K}B = \hat{φ} = 2\hat{θ}$ (1) ως εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\Delta}{A\hat{K}Σ}$. Αλλά $KA \perp ΣB$ και $KΣ \perp υ_Π$, άρα $(\widehat{\vec{υ}_π, \vec{υ}_{cm}}) = \hat{φ}$.

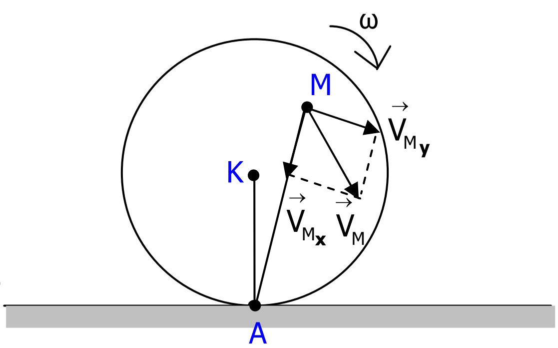
Στο παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων – που είναι ρόμβος διότι $υ_{cm}=υ_Π$ – έχουμε $(\widehat{\vec{υ}_π, \vec{V}_Σ}) = (\widehat{\vec{V}_Σ, \vec{υ}_{cm}}) = \dfrac{\hat{φ}}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} (\widehat{\vec{υ}_π, \vec{V}_Σ}) = (\widehat{\vec{V}_Σ, \vec{υ}_{cm}}) = \hat{θ}$.

Άρα η γωνία $(\widehat{\vec{V}_Σ, ΣA}) = \hat{θ} + \hat{ρ} + \hat{θ} = 2\hat{θ} + \hat{ρ} \overset{(1)}{\Rightarrow} (\widehat{\vec{V}_Σ, ΣA}) = \hat{φ} + \hat{ρ} = \dfrac{π}{2}$,

διότι η ακτίνα ΚΣ είναι κάθετη στη γραμμική (επιτρόχια) ταχύτητα $\vec{υ}_π$. Άρα $ΣA \perp \vec{V}_Σ$.

2ος τρόπος

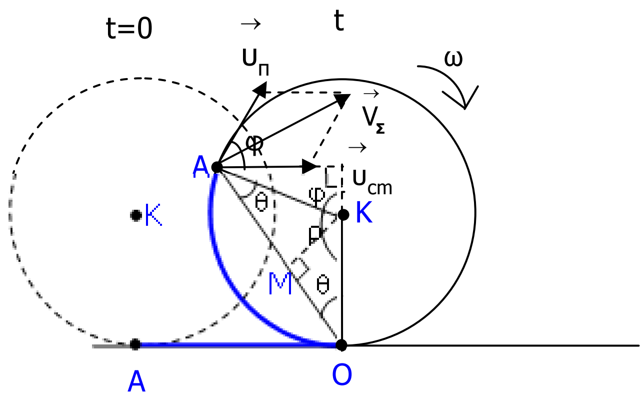
" Όταν η Φυσική δε χρειάζεται τη Γεωμετρία "



Έστω Μ τυχαίο σημείο του τροχού, του οποίου η ολική ταχύτητα V_M <u>δεν είναι</u> κάθετη στην ΜΑ. Αναλύουμε την $\vec{V}_M$ σε μία συνιστώσα στη διεύθυνση ΜΑ, την $\vec{V}_{M_x}$ και μία στην κάθετη προς τη διεύθυνση ΜΑ , την $\vec{V}_{M_y}$. Η $\vec{V}_{M_x}$ θα προκαλούσε μετακίνηση του σημείου Μ προς το σημείο Α πάνω στη ΜΑ και προς το σημείο Α, δηλαδή " θα αλλοίωνε " την μεταξύ τους απόσταση. Από τον ορισμό του μηχανικού στερεού σώματος αυτό είναι αδύνατο διότι το σχήμα του θεωρούμε ότι παραμένει αμετάβλητο και οι αποστάσεις μεταξύ των διαφόρων υλικών σημείων του παραμένουν αναλλοίωτες. Άρα πρέπει $V_{M_x}=0$, δηλαδή $\vec{V}_M=\vec{V}_{M_y}\Rightarrow \vec{V}_M \perp MA$.

β. Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με ταχύτητα σταθερού μέτρου $υ_{cm}$. Άρα $υ_{cm}=υ_π=ωR$ (2) όπου ω= η γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται ο τροχός γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τροχού και διέρχεται από το κέντρο μάζας του (cm) K.
Η ταχύτητα του σημείου Α τη χρονική στιγμή t=0 που αυτό αποτελεί το σημείο επαφής του τροχού με το επίπεδο κύλισης, είναι $\vec{V}_A=0$.

1ος τρόπος



Η ταχύτητα $\vec{V}_A$ του σημείου Α μετά από χρόνο t, στη διάρκεια του οποίου ο τροχός περιστράφηκε κατά γωνία $\hat{ρ}=ωt$ (3) είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας της μεταφορικής κίνησης $\vec{υ}_{cm}$ και της γραμμικής (επιτρόχιας) ταχύτητας $\vec{υ}_π$ λόγω της περιστροφικής κίνησης του τροχού: $\vec{V}_A=\vec{υ}_{cm}+\vec{υ}_π$ για τα μέτρα των διανυσμάτων ισχύει:

$$V_A=\sqrt{υ_{cm}^2+υ_π^2+2υ_{cm}υ_π συνφ}\overset{(2)}{\Rightarrow}V_A=\sqrt{2υ_{cm}^2+2υ_{cm}^2συνφ}\Rightarrow V_A=\sqrt{2υ_{cm}^2(1+συνφ)}(4)$$

Η γωνία περιστροφής $\hat{ρ}$ του σημείου Α μετά από χρόνο t από το σχήμα είναι :

$\hat{ρ}=π-\hat{φ}\Rightarrow\hat{φ}=π-\hat{ρ}\Rightarrow συν\hat{φ}=-συν\hat{ρ}$ (5). Από (4) $\overset{(5)}{\Rightarrow} V_A=\sqrt{2υ_{cm}^2(1-συνρ)}$

$$\Rightarrow V_A=\sqrt{2υ_{cm}^2(1-1+2ημ^2\frac{ρ}{2})}\quad\Rightarrow V_A=2υ_{cm}\,ημ\frac{\hat{ρ}}{2}\overset{(3)}{\Rightarrow}V_A=2υ_{cm}ημ\frac{ωt}{2}\quad(6).$$

2ος τρόπος

Η σχέση (6) αποδεικνύεται με τη βοήθεια της πρότασης του **α.** ερωτήματος. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο τροχός εκτελεί περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω γύρω από ένα στιγμιαία ακίνητο άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τροχού και διέρχεται από το σημείο επαφής του Ο με το επίπεδο κύλισης , διότι όλα τα σημεία του τροχού περιστρέφονται γύρω από αυτόν τον άξονα διαγράφοντας κυκλικές τροχιές με ακτίνες τις αποστάσεις τους από το σημείο επαφής Ο του τροχού με το επίπεδο κύλισης. Η ταχύτητα V_A ενός σημείου θα είναι εφαπτόμενη σε κυκλική τροχιά ακτίνας r=OA, άρα $V_A=ω(OA)$. Από το τρίγωνο $\overset{\Delta}{OKA}$ έχουμε:

$(OA)=2(OM)\Rightarrow(OA)=2Rημ\frac{\hat{ρ}}{2}\Rightarrow(OA)=2R\,ημ\frac{ω\cdot t}{2}$. Άρα $V_A=2ωRημ\frac{ωt}{2}\overset{(2)}{\Rightarrow}V_A=2υ_{cm}ημ\frac{ωt}{2}$

γ. Το σημείο Α εκτελεί μία καμπύλη (κυκλοειδή) τροχιά και η κίνησή του όπως φαίνεται από την έκφραση της ταχύτητάς του είναι περιοδική. Η περίοδος της κυκλοειδούς κίνησης είναι $T_{κυκ}=\frac{2π}{ω}$ όπου ω= η γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται ο τροχός. Το μήκος $s_{κυκ}$ της κυκλοειδούς τροχιάς που θα διαγράψει το σημείο Α σε χρόνο $t=T_{κυκ}$, που το σημείο Α θα ξαναβρεθεί σε επαφή με το επίπεδο κύλισης υπολογίζεται ως εξής:

$1^{ος}$ τρόπος

$$s_{κυκ}=\sum_{t=0}^{t=T_{κυκ}}\Delta s \Rightarrow s_{κυκ}=\sum_{t=0}^{t=T_{κυκ}} V_A \Delta t \text{ ή}$$

$$s_{κυκ}=\int_{t=0}^{t=T_{κυκ}} V_A\, dt \overset{(6)}{\Rightarrow} s_{κυκ}=\int_0^{\frac{2π}{ω}} 2υ_{cm}\, ημ\frac{ωt}{2} dt \Rightarrow s_{κυκ}=\frac{4υ_{cm}}{ω}\int_0^{2π} ημ\frac{ωt}{2} d\left(\frac{ωt}{2}\right) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$s_{κυκ}=\frac{4ωR}{ω}\left[-συν\frac{ωt}{2}\right]_0^{2π} \Rightarrow s_{κυκ}=4R\left(-συνπ+συν0\right) \Rightarrow s_{κυκ}=8R$$

$2^{ος}$ τρόπος

" Όταν η Φυσική δε χρειάζεται τον Ολοκληρωτικό Λογισμό "
Η εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Α που εκτελεί περιοδική κυκλοειδή κίνησή μπορεί να θεωρηθεί ως η εξίσωση της ταχύτητας σε μία απλή αρμονική ταλάντωση της οποίας η εξίσωση ταχύτητας είναι: $V_{A.A.T.}=2υ_{cm} ημ\frac{ωt}{2} \Rightarrow V_{A.A.T.}=V_{max} ημ\frac{ωt}{2}$ (ή $V_{A.A.T.}=V_{max} συν\left(\frac{ωt}{2}+\frac{3π}{2}\right)$) όπου η μέγιστη ταχύτητα της Α.Α.Τ είναι $V_{max}=2υ_{cm} \overset{(2)}{\Rightarrow} V_{max}=2ωR$ και η γωνιακή συχνότητά της είναι $ω_{A.A.T.}=\frac{ω}{2}$. Από τη γνωστή σχέση της Α.Α.Τ : $V_{max}=ω_{A.A.T}A$ όπου Α= το πλάτος της Α.Α.Τ.

προκύπτει ότι $2ωR=ω_{A.A.T}A \Rightarrow 2ωR=\frac{ω}{2}A \Rightarrow A=4R$ (7).

Δηλαδή η Α.Α.Τ που έχει την ίδια εξίσωση ταχύτητας με την κυκλοειδή τροχιά, έχει πλάτος Α=4R και περίοδο $T_{A.A.T}=\frac{2π}{\frac{ω}{2}}=\frac{4π}{ω} \Rightarrow T_{A.A.T}=2T_{κυκ}$. Σε χρόνο $t=T_{κυκ}$ που το σημείο Α ξαναβρίσκεται σε επαφή με το επίπεδο κύλισης, η ταχύτητά του ξαναγίνεται μηδέν και $\vec{V}_A=0$. Ο ταλαντωτής που εκτελεί "την αντίστοιχη" Α.Α.Τ μηδενίζει δύο διαδοχικές φορές την ταχύτητά του σε χρόνο

$t=\frac{T_{A.A.T.}}{2}=\frac{\frac{2π}{\frac{ω}{2}}}{2}=\frac{2π}{ω}=T_{κυκ}$ διαγράφοντας μήκος τροχιάς $s_{A.A.T}=2A \overset{(7)}{\Rightarrow} s_{A.A.T}=2\cdot 4R \Rightarrow$

$$s_{A.A.T}=8R=s_{κυκ}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΣΧΟΛΙΑ

1. Κάθε σημείο του κυλιόμενου χωρίς ολίσθηση τροχού εκτελεί κυκλική κίνηση περί στιγμιαία ακίνητο άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τροχού και διέρχεται από το σημείο επαφής του τροχού με το επίπεδο κύλισης, με ακτίνα την απόσταση του σημείου από τον στιγμιαία ακίνητο άξονα περιστροφής. Δηλαδή η σύνθετη κίνηση (μεταφορική κίνηση και στροφική περί άξονα που είναι κάθετος στον τροχό και διέρχεται από το κέντρο μάζας cm) αποτελεί στην ουσία την ανάλυση της μίας και μόνης στροφικής κίνησης περί τον στιγμιαία ακίνητο άξονα που διέρχεται από το εκάστοτε σημείο επαφής του κυλιόμενου τροχού με το επίπεδο κύλισης.
   Η θεώρηση αυτή για την κύλιση χωρίς ολίσθηση μας επιτρέπει να υπολογίζουμε γρήγορα και απλά την ταχύτητα κάθε σημείου του κυλιόμενου σώματος τώρα που ασχολούμαστε με

την κινηματική μελέτη της κίνησης αυτής και θέτει τις βάσεις ώστε κατά την κινητική μελέτη (έργο της στροφικής κίνησης, κινητική μεταφορική ενέργεια και κινητική στροφική ενέργεια) να κατανοήσουμε γιατί κάθε φορά που ένα στερεό σώμα στρέφεται περί άξονα που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του (cm) η ολική κινητική ενέργεια του σώματος είναι άθροισμα μιας μεταφορικής κινητικής ενέργειας που οφείλεται στην κίνηση του κέντρου μάζας ως προς το σημείο που ο άξονας περιστροφής τέμνει το επίπεδο της κίνησης του σώματος (το σημείο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή ενός αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων) και μιας στροφικής κινητικής ενέργειας που έχει το σώμα ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του (cm) (αυτή η στροφική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας θεωρείται ως μια μορφή "εσωτερικής" ή "έμφυτης" κινητικής ενέργειας (internal or intrinsic energy) που έχει κάθε σώμα που εκτελεί στροφική κίνηση.

2. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την περιοδική κυκλοειδή κίνηση που εκτελεί ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού με μία απλή αρμονική ταλάντωση ως εξής:

ΚΥΚΛΟΕΙΔΗΣ ΚΙΝΗΣΗ	**Α.Α.Τ**
γωνιακή ταχύτητα: $\omega_{κυκ}=\omega$	γωνιακή συχνότητα: $\omega_{Α.Α.Τ}=\dfrac{\omega}{2}$
περίοδος: $T_{κυκ}=\dfrac{2\pi}{\omega}$	περίοδος: $T_{Α.Α.Τ}=\dfrac{2\pi}{\frac{\omega}{2}}=\dfrac{4\pi}{\omega}=2T_{κυκ}$
γωνία περιστροφής: $\varphi=\omega t$	φάση : $\varphi=\dfrac{\omega t}{2}$
ταχύτητα: $V_{κυκ}=2υ_{cm}ημ\dfrac{\omega t}{2}$	ταχύτητα: $V_{Α.Α.Τ}=\dfrac{\omega}{2}\cdot 4R\cdot ημ\dfrac{\omega t}{2}=\dfrac{\omega}{2}\cdot 4R\cdot συν(\dfrac{\omega t}{2}+\dfrac{3\pi}{2})$
t=0: $\varphi=0$, $V_{κυκ}=0$	t=0: $\varphi=0$, $V_{Α.Α.Τ}=0$
$t=\dfrac{T_{κυκ}}{4}$: $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $V_{κυκ}=υ_{cm}\sqrt{2}$	$t=\dfrac{T_{κυκ}}{4}=\dfrac{T_{Α.Α.Τ}}{8}$: $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $V_{Α.Α.Τ}=\omega\cdot 4R\sqrt{2}$
$t=\dfrac{T_{κυκ}}{2}$: $\varphi=\pi$, $V_{κυκ}=2υ_{cm}$, $s_{κυκ}=4R$	$t=\dfrac{T_{κυκ}}{2}=\dfrac{T_{Α.Α.Τ}}{4}$: $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $V_{Α.Α.Τ}=\omega\cdot 4R$, $s_{Α.Α.Τ}=A=4R$
$t=\dfrac{3T_{κυκ}}{4}$ $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$, $V_{κυκ}=υ_{cm}\sqrt{2}$	$t=\dfrac{3T_{κυκ}}{4}=\dfrac{3T_{Α.Α.Τ}}{8}$: $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$, $V_{Α.Α.Τ}=\omega\cdot 4R\sqrt{2}$
$t=T_{κυκ}$: $\varphi=2\pi$, $V_{κυκ}=0$, $s_{κυκ}=8R$	$t=T_{κυκ}=\dfrac{T_{Α.Α.Τ}}{2}$: $\varphi=\pi$, $V_{Α.Α.Τ}=0$, $s_{Α.Α.Τ}=2A=8R$

3. Επειδή στο χρονικό διάστημα $0\le t\le T_{κυκ}$ η γωνία περιστροφής $\hat{\varphi}$ του τροχού παίρνει τιμές $0\le\hat{\varphi}=\omega t\le 2\pi$, η φάση φ της αντίστοιχης Α.Α.Τ θα παίρνει στο ίδιο χρονικό διάστημα τιμές $0\le\hat{\varphi}=\dfrac{\omega t}{2}\le\pi$ με αποτέλεσμα το $ημ\dfrac{\omega t}{2}>0$ δηλαδή η σχέση $V_A=2υ_{cm}ημ\dfrac{\omega t}{2}$ εκφράζει γι' αυτό το χρονικό διάστημα και το μέτρο της ταχύτητας.

Ξ. ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ