

ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ ΑΠΟ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

Θα προσπαθήσω να παρουσιάσω το σχηματισμό στάσιμου κύματος από ανάκλαση σε χορδή που το ένα άκρο της είναι ακλόνητα στερεωμένο, προκειμένου να δείξω ότι η επιλογή της θέσης $x=0$ και της χρονικής στιγμής $t=0$ καθορίζει τη μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος, αλλά δεν αλλάζει τα συμπεράσματά μας για το πλάτος ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής καθώς και τις θέσεις σχηματισμού δεσμών και κοιλιών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Θεωρούμε χορδή μήκους L με το άκρο της Γ ακλόνητα στερεωμένο. Με κατάλληλο μηχανισμό θέτουμε σε απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T το ελεύθερο άκρο O της χορδής και αυτό γίνεται πηγή παραγωγής ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος που διαδίδεται στη χορδή με ταχύτητα u και έχει μήκος κύματος λ . Το αρμονικό κύμα ανακλάται στο ακίνητο άκρο της χορδής Γ χωρίς απώλειες ενέργειας και σχηματίζεται στάσιμο κύμα. Όταν το στάσιμο κύμα φθάνει στη θέση O καταργείται ο μηχανισμός διέγερσης. Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

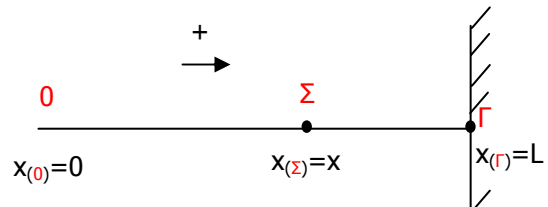
Θα εξετάσουμε τέσσερις χαρακτηριστικές περιπτώσεις χωρίς βλάβη της γενικότητας.

A. Θεωρούμε ότι $x=0$ στη θέση O ($x_{(O)}=0$) και $t=0$ τη χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο O με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$ και θετική φορά ($\rightarrow$) προς τα δεξιά. Το τυχαίο σημείο Σ ($x_{\Sigma}=x$) αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από

χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{x}{u}$ με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega(t-t_1)$

και η εξίσωση του αρμονικού κύματος που παράγεται και διαδίδεται προς τα δεξιά

(προσπίπτον κύμα) είναι $y_{1\Sigma}=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$. **(1a)**



Το ακίνητο άκρο της χορδής Γ ($x_{\Gamma}=L$), όταν φθάσει το προς τα δεξιά διαδιδόμενο κύμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται με εξίσωση $y_{1\Gamma}=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda})$ που προκύπτει από την (1a). Επειδή το σημείο Γ παραμένει διαρκώς ακίνητο, πρέπει $y_{O\Gamma}=0$. Δηλαδή για τις εξισώσεις ταλάντωσης του σημείου Γ , $y_{1\Gamma}$ εξ αιτίας του προσπίπτοντος κύματος και $y_{2\Gamma}$ εξ αιτίας του ακακλώμενου κύματος που θα δημιουργηθεί στη θέση Γ από την **Αρχή της Επαλληλίας** προκύπτει:

$$y_{O\Gamma} = y_{1\Gamma} + y_{2\Gamma} = 0 \Rightarrow y_{2\Gamma} = -y_{1\Gamma} \Rightarrow y_{2\Gamma} = -A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}) \Rightarrow y_{2\Gamma} = A\eta\mu \left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}) + \pi \right]. \text{ Αυτή είναι η}$$

εξίσωση ταλάντωσης του άκρου Γ της χορδής που αποτελεί την πηγή παραγωγής του ανακλώμενου κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά. Το τυχαίο σημείο Σ ($x_{\Sigma}=x$) αρχίζει να ταλαντώνεται εξ αιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά (ανακλώμενο κύμα) μετά

$$\text{από χρονικό διάστημα } t_2 = \frac{L-x}{u} \text{ με εξίσωση } y_{2\Sigma} = A\eta\mu \left[2\pi(\frac{t-t_2}{T}-\frac{L}{\lambda}) + \pi \right] \Rightarrow$$

$$y_{2\Sigma} = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L-x}{uT} - \frac{L}{\lambda}\right) + \pi\right] \Rightarrow y_{2\Sigma} = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{2L}{\lambda}\right) + \pi\right]. \quad (2a)$$

Παρατηρούμε ότι η ανάκλαση του προσπίπτοντος κύματος προκαλεί **μεταβολή στη φάση του ανακλώμενου κύματος κατά π** .

Από την **Αρχή της Επαλληλίας** η απομάκρυνση του σημείου **Σ** όταν συμβάλλουν τα δύο

$$\text{κύματα είναι: } y_{O\Lambda\Sigma} = y_{1\Sigma} + y_{2\Sigma} \xrightarrow{(1a)} y_{O\Lambda\Sigma} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{2L}{\lambda}\right) + \pi\right] \Rightarrow$$

$$y_{O\Lambda\Sigma} = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{2L}{\lambda}\right) - \pi}{2} \eta\mu\frac{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{2L}{\lambda}\right) + \pi}{2} \Rightarrow$$

$$y_{O\Lambda\Sigma} = 2A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{L-x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y_{O\Lambda\Sigma} = 2A\eta\mu 2\pi\left(\frac{L-x}{\lambda}\right) \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right) \quad (3a)$$

Η εξίσωση **(3a)** είναι η εξίσωση μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης με πλάτος

$$|A'| = 2A\left|\eta\mu 2\pi\left(\frac{L-x}{\lambda}\right)\right| \quad (4) \text{ και περίοδο } T \text{ ίδια με αυτήν των δύο κυμάτων που}$$

συμβάλλουν, δηλαδή η **(3a)** είναι **εξίσωση στάσιμου κύματος**. Το πλάτος ταλάντωσης των διαφόρων σημείων διακυμαίνεται μεταξύ των τιμών $0 \leq |A'| \leq 2A$. Στη θέση $x=L$ (σημείο **Γ**) η

(4) δίνει $|A'| = 0$, δηλαδή δεσμό. Στη θέση $x=0$ (σημείο **O**) η **(4)** δίνει $|A'| = 2A\eta\mu 2\pi\frac{L}{\lambda}$ και

δείχνει ότι το πλάτος ταλάντωσης του ελεύθερου άκρου **O** **εξαρτάται από το μήκος της χορδής L και το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων**. Σημειώνεται ότι η εξίσωση

(3a) ισχύει για όλο το μήκος της χορδής για $t \geq \frac{2L}{u}$ = χρονική στιγμή που το ανακλώμενο κύμα

φθάνει στο άκρο **O** . Ενδεικτικά υπολογίζουμε τη φάση του σημείου **O** τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{2L}{u} : \varphi_{(O)} = 2\pi\frac{L}{\lambda} + \frac{\pi}{2}.$$

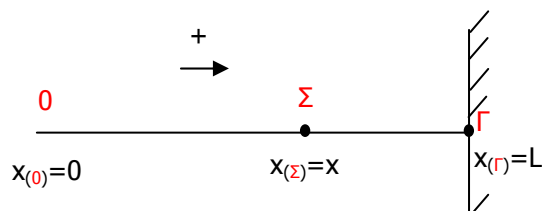
B. Θεωρούμε ότι $x=0$ στη θέση **O** ($x_{(O)}=0$) και $t=0$ τη χρονική στιγμή που αρχίζει να

ταλαντώνεται το σημείο **Γ** ($x_{(\Gamma)}=L$) με εξίσωση $y_{1\Gamma}=A\eta\mu\omega t$ και θετική φορά ($\rightarrow$) προς τα δεξιά. Το τυχαίο σημείο **Σ** ($x_{\Sigma}=x$) έχει ήδη αρχίσει να ταλαντώνεται πριν από χρονικό διάστημα

$t_1 = \frac{L-x}{u}$ με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega(t+t_1)$ και η εξίσωση

του αρμονικού κύματος που παράγεται και διαδίδεται προς τα δεξιά (προσπίπτον κύμα) είναι

$$y_{1\Sigma} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{L}{\lambda}\right). \quad (1\beta)$$



Επειδή το σημείο **Γ** παραμένει διαρκώς ακίνητο, πρέπει $y_{O\Lambda\Gamma}=0$. Δηλαδή για τις εξισώσεις ταλάντωσης του σημείου **Γ** , $y_{1\Gamma}$ εξ αιτίας του προσπίπτοντος κύματος και $y_{2\Gamma}$ εξ αιτίας του ακακλώμενου κύματος που θα δημιουργηθεί στη θέση **Γ** από την **Αρχή της Επαλληλίας**

προκύπτει: $y_{0\Lambda\Gamma} = y_{1\Gamma} + y_{2\Gamma} = 0 \Rightarrow y_{2\Gamma} = -y_{1\Gamma} \Rightarrow y_{2\Gamma} = -A\eta\mu\omega t \Rightarrow y_{2\Gamma} = A\eta\mu(\omega t + \pi) \Rightarrow$

$y_{2\Gamma} = A\eta\mu(2\pi \frac{t}{T} + \pi)$. Αυτή είναι η εξίσωση ταλάντωσης του άκρου **Γ** της χορδής που αποτελεί

την πηγή παραγωγής του ανακλώμενου κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά. Το τυχαίο σημείο **Σ** ($x_{\Sigma} = x$) αρχίζει να ταλαντώνεται εξ αιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά (ανακλώμενο κύμα) μετά από χρονικό διάστημα $t_2 = \frac{L-x}{u}$ με εξίσωση

$$y_{2\Sigma} = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t-t_2}{T}\right) + \pi\right] \Rightarrow y_{2\Sigma} = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L-x}{uT}\right) + \pi\right] \Rightarrow y_{2\Sigma} = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{L}{\lambda}\right) + \pi\right] \quad (2\beta)$$

Από την **Αρχή της Επαλληλίας** η απομάκρυνση του σημείου **Σ** όταν συμβάλλουν τα δύο

$$\text{κύματα είναι: } y_{0\Lambda\Sigma} = y_{1\Sigma} + y_{2\Sigma} \xrightarrow{(1\beta)} y_{0\Lambda\Sigma} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{L}{\lambda}\right) + A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{L}{\lambda}\right) + \pi\right] \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma} = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{L}{\lambda} - \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{L}{\lambda}\right) - \pi}{2} \eta\mu\frac{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{L}{\lambda} + \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{L}{\lambda}\right) + \pi}{2} \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma} = 2A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{L}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_{0\Lambda\Sigma} = 2A\eta\mu 2\pi\left(\frac{L}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right) \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \quad (3\beta)$$

Στη θέση $x=L$ (σημείο **Γ**) η σχέση $|A'| = 2A\left|\eta\mu 2\pi\left(\frac{L}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)\right|$ δίνει $|A'| = 0$, δηλαδή δεσμό. Στη θέση

$x=0$ (σημείο **Ο**) η **(4)** δίνει $|A'| = 2A\eta\mu 2\pi\frac{L}{\lambda}$ και δείχνει ότι το πλάτος ταλάντωσης του

ελεύθερου άκρου **Ο** **εξαρτάται από το μήκος της χορδής L και το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων**. Σημειώνεται ότι η εξίσωση **(3β)** ισχύει για όλο το μήκος της χορδής για $t \geq \frac{L}{u}$ = χρονική στιγμή που το ανακλώμενο κύμα φθάνει στο άκρο **Ο**. Ενδεικτικά

υπολογίζουμε τη φάση του σημείου **Ο** τη χρονική στιγμή $t = \frac{L}{u}$: $\varphi_{(O)} = 2\pi\frac{L}{\lambda} + \frac{\pi}{2}$.

Γ. Θεωρούμε ότι $x=0$ στη θέση **Γ** ($x_{(\Gamma)}=0$) και $t=0$ τη χρονική στιγμή που αρχίζει να

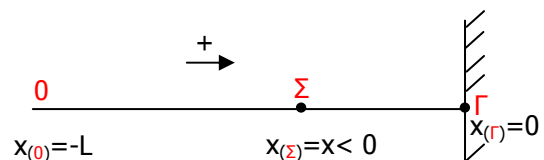
ταλαντώνεται το σημείο **Ο** ($x_{(O)}=-L$) με εξίσωση $y_{1O} = A\eta\mu\omega t$ και θετική φορά ($\rightarrow$) προς τα δεξιά. Το τυχαίο σημείο **Σ** ($x_{\Sigma}=x$) αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρονικό διάστημα

$t_1 = \frac{|L|-|x|}{u}$ με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega(t-t_1)$ και η

εξίσωση του αρμονικού κύματος που παράγεται

και διαδίδεται προς τα δεξιά (προσπίπτον κύμα) είναι $y_{1\Sigma} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{|L|-|x|}{uT}\right)$ $\xrightarrow{x < 0}$ $\xrightarrow{L < 0}$

$$y_{1\Sigma} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{L}{\lambda}\right) \quad (1\gamma)$$



Το ακίνητο άκρο της χορδής $\Gamma(x_{\Gamma}=0)$ όταν φθάσει το προς τα δεξιά διαδιδόμενο κύμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται με εξίσωση $y_{1\Gamma}=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda})$ που προκύπτει από την (1γ). Επειδή το σημείο Γ παραμένει διαρκώς ακίνητο, πρέπει $y_{0\Lambda\Gamma}=0$. Δηλαδή για τις εξισώσεις ταλάντωσης του σημείου Γ , $y_{1\Gamma}$ εξ αιτίας του προσπίπτοντος κύματος και $y_{2\Gamma}$ εξ αιτίας του ανακλώμενου κύματος που θα δημιουργηθεί στη θέση Γ από την **Αρχή της Επαλληλίας** προκύπτει:

$$y_{0\Lambda\Gamma}=y_{1\Gamma}+y_{2\Gamma}=0 \Rightarrow y_{2\Gamma}=-y_{1\Gamma} \Rightarrow y_{2\Gamma}=-A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda}) \Rightarrow y_{2\Gamma}=A\eta\mu 2\pi\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda})+\pi\right]. \text{ Αυτή}$$

είναι η εξίσωση ταλάντωσης του άκρου Γ της χορδής που αποτελεί την πηγή παραγωγής του ανακλώμενου κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά. Το τυχαίο σημείο $\Sigma(x_{\Sigma}=x)$ αρχίζει να ταλαντώνεται εξ αιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά (ανακλώμενο κύμα) μετά

$$\text{από χρονικό διάστημα } t_2=\frac{|x|}{u} \text{ με εξίσωση } y_{2\Sigma}=A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t-t_2}{T}+\frac{L}{\lambda})+\pi\right] \Rightarrow$$

$$y_{2\Sigma}=A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{|x|}{uT}+\frac{L}{\lambda})+\pi\right] \stackrel{x<0}{\Rightarrow} y_{2\Sigma}=A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}+\frac{L}{\lambda})+\pi\right] \quad (2\gamma)$$

Από την **Αρχή της Επαλληλίας** η απομάκρυνση του σημείου Σ όταν συμβάλλουν τα δύο

$$\text{κύματα είναι: } y_{0\Lambda\Sigma}=y_{1\Sigma}+y_{2\Sigma} \stackrel{(1\gamma)}{\Rightarrow} y_{0\Lambda\Sigma}=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{L}{\lambda})+A\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}+\frac{L}{\lambda})+\pi\right] \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma}=2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{L}{\lambda}-\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda})-\pi}{2}\eta\mu\frac{2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{L}{\lambda}+\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}+\frac{L}{\lambda})+\pi}{2} \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma}=2A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi(-\frac{x}{\lambda})-\frac{\pi}{2}\right]\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda})+\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y_{0\Lambda\Sigma}=-2A\eta\mu(2\pi\frac{x}{\lambda})\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda})+\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma}=2A\eta\mu(2\pi\frac{x}{\lambda})\eta\mu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda})+\frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow y_{0\Lambda\Sigma}=2A\eta\mu(2\pi\frac{x}{\lambda})\sigma\upsilon\nu\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{L}{\lambda})+\pi\right] \quad (3\gamma)$$

Στη θέση $x=0$ (σημείο Γ) η σχέση $|A'|=2A\eta\mu 2\pi\frac{|x|}{\lambda}$ δίνει $|A'|=0$, δηλαδή δεσμό. Στη θέση

$x=-L$ (σημείο Θ) δίνει $|A'|=2A\eta\mu 2\pi\frac{L}{\lambda}$ και δείχνει ότι το πλάτος ταλάντωσης του ελεύθερου

άκρου Θ **εξαρτάται από το μήκος της χορδής L , διότι το x μετρείται από τη θέση Γ και το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων.** Σημειώνεται ότι η εξίσωση (3γ) ισχύει για

όλο το μήκος της χορδής για $t \geq \frac{2L}{u}$ = χρονική στιγμή που το ανακλώμενο κύμα φθάνει στο

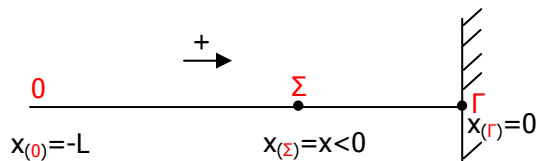
άκρο Θ . Ενδεικτικά υπολογίζουμε τη φάση του σημείου Θ τη χρονική στιγμή $t=\frac{2L}{u}$:

$$\varphi_{(\Theta)}=2\pi\frac{3L}{\lambda}+\frac{3\pi}{2}.$$

Δ. Θεωρούμε ότι $x=0$ στη θέση $\Gamma(x_{\Gamma}=0)$ και $t=0$ τη χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο $\Gamma(x_{\Gamma}=0)$ με εξίσωση

$y_{1\Gamma}=A\eta\mu\omega t$ και θετική φορά ($\rightarrow$) προς τα δεξιά. Το τυχαίο σημείο $\Sigma(x_{\Sigma}=x)$ έχει ήδη αρχίσει να ταλαντώνεται πριν από χρονικό

διάστημα $t_1=\frac{|x|}{u}$ με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega(t+t_1)$ και



η

εξίσωση του αρμονικού κύματος που παράγεται και διαδίδεται προς τα δεξιά (προσπίπτον

κύμα) είναι $y_{1\Sigma}=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{|x|}{u}) \stackrel{x<0}{\Rightarrow} y_{1\Sigma}=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$. **(1δ)**

Επειδή το σημείο Γ παραμένει διαρκώς ακίνητο, πρέπει $y_{0\Gamma}=0$. Δηλαδή για τις εξισώσεις ταλάντωσης του σημείου Γ , $y_{1\Gamma}$ εξ αιτίας του προσπίπτοντος κύματος και $y_{2\Gamma}$ εξ αιτίας του ανακλώμενου κύματος που θα δημιουργηθεί στη θέση Γ από την **Αρχή της Επαλληλίας** προκύπτει: $y_{0\Gamma}=y_{1\Gamma}+y_{2\Gamma}=0 \Rightarrow y_{2\Gamma}=-y_{1\Gamma} \Rightarrow y_{2\Gamma}=-A\eta\mu\omega t \Rightarrow y_{2\Gamma}=A\eta\mu(\omega t+\pi) \Rightarrow$

$y_{2\Gamma}=A\eta\mu(2\pi\frac{t}{T}+\pi)$. Αυτή είναι η εξίσωση ταλάντωσης του άκρου Γ της χορδής που αποτελεί

την πηγή παραγωγής του ανακλώμενου κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά. Το τυχαίο σημείο $\Sigma(x_{\Sigma}=x)$ αρχίζει να ταλαντώνεται εξ αιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα

αριστερά (ανακλώμενο κύμα) μετά από χρονικό διάστημα $t_2=\frac{|x|}{u}$ με εξίσωση

$$y_{2\Sigma}=A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t-t_2}{T}\right)+\pi\right] \Rightarrow y_{2\Sigma}=A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{|x|}{uT}\right)+\pi\right] \stackrel{x<0}{\Rightarrow} y_{2\Sigma}=A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\pi\right] \quad \mathbf{(2\delta)}$$

Από την **Αρχή της Επαλληλίας** η απομάκρυνση του σημείου Σ όταν συμβάλλουν τα δύο

$$\text{κύματα είναι: } y_{0\Lambda\Sigma}=y_{1\Sigma}+y_{2\Sigma} \stackrel{(1\delta)}{\Rightarrow} y_{0\Lambda\Sigma}=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\pi\right] \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma}=2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)-\pi}{2}\eta\mu\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\pi}{2} \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma}=2A\sigma\upsilon\nu\left(-2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_{0\Lambda\Sigma}=2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y_{0\Lambda\Sigma}=-2A\eta\mu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_{0\Lambda\Sigma}=2A\eta\mu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y_{0\Lambda\Sigma}=2A\eta\mu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{t}{T}+\pi\right) \quad \mathbf{(3\delta)}$$

Στη θέση $x=0$ (σημείο Γ) η σχέση $|A'|=2A\eta\mu 2\pi\frac{|x|}{\lambda}$ δίνει $|A'|=0$, δηλαδή δεσμό. Στη θέση

$x=-L$ (σημείο $\circ$) δίνει $|A'|=2A\eta\mu 2\pi\frac{L}{\lambda}$ και δείχνει ότι το πλάτος ταλάντωσης του ελεύθερου

άκρου **Ο** εξαρτάται από το μήκος της χορδής L , διότι το x μετريέται από τη θέση **Γ** και το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων. Σημειώνεται ότι η εξίσωση **(3δ)** ισχύει για όλο το μήκος της χορδής για $t \geq \frac{L}{u}$ = χρονική στιγμή που το ανακλώμενο κύμα φθάνει στο άκρο

Ο. Ενδεικτικά υπολογίζουμε τη φάση του σημείου **Ο** τη χρονική στιγμή $t = \frac{L}{u}$: $\varphi_{(O)} = 2\pi \frac{L}{\lambda} + \frac{3\pi}{2}$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

1. Η έκφραση της εξίσωσης του στάσιμου κύματος εξαρτάται από το που ορίζουμε τη θέση $x=0$ και το πότε ορίζουμε τη χρονική στιγμή $t=0$:

Θέση ($x=0$)	Αρχή των χρόνων ($t=0$)	Εξίσωση του στάσιμου κύματος
Στο ελεύθερο άκρο Ο	Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Ο	$y_{OΛΣ} = 2A \eta \mu 2\pi \left(\frac{L}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \sigma \upsilon \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right)$ (3α)
Στο ελεύθερο άκρο Ο	Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Γ	$y_{OΛΣ} = 2A \eta \mu 2\pi \left(\frac{L}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \sigma \upsilon \nu \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$ (3β)
Στο ακίνητο άκρο Γ	Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Ο	$y_{OΛΣ} = 2A \eta \mu \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \sigma \upsilon \nu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{L}{\lambda} \right) + \pi \right]$ (3γ)
Στο ακίνητο άκρο Γ	Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Γ	$y_{OΛΣ} = 2A \eta \mu \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \sigma \upsilon \nu \left(2\pi \frac{t}{T} + \pi \right)$ (3δ)

2. Το πλάτος του στασίμου κύματος εξαρτάται από τη θέση κάθε σημείου και από το μήκος της χορδής L καθώς και το μήκος κύματος λ των τρεχόντων αρμονικών κυμάτων που με τη συμβολή τους παράγουν το στάσιμο κύμα. Στις εξισώσεις **(3γ)** και **(3δ)** παρά την απουσία της παραμέτρου L από τον όρο του πλάτους υπάρχει εξάρτηση από το μήκος της χορδής διότι η απόσταση x μετريέται από το ακίνητο άκρο **Γ** της χορδής (δεσμός).

3. Η κινητική κατάσταση ενός σημείου –άρα και το πλάτος ταλάντωσης του- δεν εξαρτάται από την επιλογή της θέσης $x=0$ και της χρονικής στιγμής $t=0$.

4. Για να σχηματίζεται κοιλία στο ελεύθερο άκρο **Ο** της χορδής πρέπει $|A'| = 2A$

$$\Rightarrow 2A \eta \mu 2\pi \frac{L}{\lambda} = \pm 2A \Rightarrow \eta \mu 2\pi \frac{L}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow 2\pi \frac{L}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = k \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \text{ με } k=0,1,2,3...$$

Αντίστοιχα για να σχηματίζεται δεσμός στο ελεύθερο άκρο **Ο** της χορδής πρέπει

$$|A'| = 0 \Rightarrow 2A \eta \mu 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0 \Rightarrow \eta \mu 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{L}{\lambda} = k\pi \Rightarrow L = k \frac{\lambda}{2} \text{ με } k=0,1,2,3...$$

5. Η τιμή της φάσης σε κάποιο σημείο (π.χ. στο σημείο **Ο**) εξαρτάται από την επιλογή της χρονικής στιγμής $t=0$:

Αρχή των χρόνων($t=0$)	Φάση του σημείου Ο , όταν το ανακλώμενο κύμα φθάνει στο Ο
Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Ο	$\varphi_{(O)} = 2\pi \frac{L}{\lambda} + \frac{\pi}{2}$
Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Γ	$\varphi_{(O)} = 2\pi \frac{L}{\lambda} + \frac{\pi}{2}$
Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Ο	$\varphi_{(O)} = 2\pi \frac{3L}{\lambda} + \frac{3\pi}{2}$
Το προσπίπτον κύμα στο άκρο Γ	$\varphi_{(O)} = 2\pi \frac{L}{\lambda} + \frac{3\pi}{2}$

6. Επιλέγοντας ως χρονική στιγμή $t=0$ τη χρονική στιγμή που αρχίζει η συμβολή του προσπίπτοντος και του ανακλωμένου κύματος (εξισώσεις **(3β)** και **(3δ)**), ο όρος της φάσης

$\sin 2\pi(\frac{t}{T})$ στην **(3β)** και $\sin 2\pi(\frac{t}{T} + \pi)$ στην **(3δ)** γίνεται ανεξάρτητος του μήκους της

χορδής L με αποτέλεσμα η εξίσωση του στάσιμου κύματος “να θυμίζει” την αντίστοιχη του

σχολικού βιβλίου ($y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta \mu 2\pi \frac{t}{T}$), όμως όλες οι εκφράσεις (**(3α)**, **(3β)**, **(3γ)**, **(3δ)**)

απαντούν στην αναφορά του σχολικού βιβλίου ότι η εξίσωση χρειάζεται τροποποίηση ώστε στη θέση ενός ακίνητου άκρου **να δίνει δεσμό**.

Η διαδικασία ακολουθήθηκε σκόπιμα πανομοιότυπα στις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις για να μπορεί να αποτελέσει και εξάσκηση στην εύρεση της εξίσωσης του τρέχοντος αρμονικού κύματος.

Ξ.ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ