

Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ελαστική χορδή που ταυτίζεται με τον άξονα Ox κατά τη θετική φορά και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x=0$ όπου $y_{x=0}=0$ και $V_{x=0}>0$. Η εξίσωση του κύματος είναι $y=A\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$. Η εξίσωση αυτή είναι συνάρτηση δύο

ανεξάρτητων μεταβλητών $y=f(x,t)$, όπου $x=$ η απόσταση ενός σημείου από τη θέση $x=0$ και $t=$ η χρονική στιγμή για την οποία υπολογίζουμε την απομάκρυνση y του σημείου από τη θέση ισορροπίας του.

Εάν $x=\text{σταθερό}$, τότε η συνάρτηση $y=f(t)=A\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθερό} \right)$ (1) είναι η συνάρτηση

της απομάκρυνσης ενός συγκεκριμένου σημείου (εξίσωση ταλάντωσης) σε συνάρτηση με το χρόνο. Από τον ορισμό της ταχύτητας V προκύπτει ότι αν παραγωγίσουμε τη σχέση (1) ως προς το χρόνο, τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του συγκεκριμένου σημείου είναι

$$V = \frac{dy}{dt} \Rightarrow V = A \frac{2\pi}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθερό} \right) \Rightarrow V = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθερό} \right) \quad (2)$$

Εάν $t=\text{σταθερό}$ τότε η συνάρτηση $y=f(x)=A\mu 2\pi \left(\text{σταθερό} - \frac{x}{\lambda} \right)$ είναι η συνάρτηση των

απομακρύνσεων των διαφόρων σημείων τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή (στιγμιότυπο του κύματος). Αν παραγωγίσουμε τη σχέση αυτή ως προς x δίνει:

$$\frac{dy}{dx} = -A \frac{2\pi}{\lambda} \sin 2\pi \left(\text{σταθερό} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3) \text{ η οποία } \mathbf{\Delta EN \text{ εκφράζει κάποιο φυσικό μέγεθος.}}$$

Από (2), (3): $\frac{dy}{dx} \neq V$.

Άρα σχέση της μορφής $V=V(x)$ που να δίνει τις στιγμιαίες τιμές της ταχύτητας σε **διαφορετικές θέσεις** την **ίδια** χρονική στιγμή, δεν μπορεί να υπάρξει. Η σχέση (2) όμως μπορεί να δώσει σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα για τη στιγμιαία ταχύτητα ταλάντωσης σε κάποια θέση, ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των x και t , με μία ουσιαστική διαφορά όμως, η πορεία:

$$y=f(x,t) \xrightarrow{x=\text{σταθερό}} y=f(t) \rightarrow V = \frac{dy}{dt} = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθερό} \right) \xrightarrow{t=\text{σταθερό}} V = \text{στιγμιαία ταχύτητα, είναι ορθή}$$

ενώ η πορεία:

$$y=f(x,t) \xrightarrow{t=\text{σταθερό}} y=f(x) \rightarrow y=A\mu 2\pi \left(\text{σταθερό} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{;} V = \omega A \sin 2\pi \left(\text{σταθερό} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{x=\text{σταθερό}}$$

$V=\text{στιγμιαία ταχύτητα}$ είναι λανθασμένη.

Δηλαδή η σχέση $V = \omega A \sin 2\pi \left(\text{σταθερό} - \frac{x}{\lambda} \right)$ δεν προκύπτει από πουθενά και είναι λάθος

να χρησιμοποιείται.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Σε ασκήσεις που ζητείται η στιγμιαία ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή θα βρίσκουμε τη σχέση (2) και θα αντικαθιστούμε τη δοθείσα χρονική στιγμή.

Επίσης όταν ζητείται το πλήθος των σημείων της χορδής που ικανοποιούν μία ιδιότητα σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_1 (π.χ. $|V| = \frac{V_{\max}}{2}$) θα πρέπει η δοθείσα συνθήκη να

μετατρέπεται σε σχέση της απομάκρυνσης $y(x)=y_1(x)$ (από τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης: $V=\pm\omega\sqrt{A^2-y^2} \Rightarrow \pm\frac{V_{\max}}{2} = \pm\omega\sqrt{A^2-y_1^2} \Rightarrow \frac{\omega^2 A^2}{4} = \omega^2 A^2 - \omega^2 y_1^2 \Rightarrow y_1 = \pm\frac{A\sqrt{3}}{2}$)

και το πλήθος των σημείων υπολογίζεται:

A. Από τη λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης: $y=y_1(x)$ όπου οι θέσεις των ζητούμενων σημείων θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη $x < ut_1$, όπου u η ταχύτητα διάδοσης του κύματος ή

B. Από το στιγμιότυπο του κύματος όπου για τη δοθείσα χρονική στιγμή t_1 , βρίσκουμε το πλήθος των σημείων που έχουν απομάκρυνση $y = y_1$.

Εφαρμογή

Ένα αρμονικό κύμα της μορφής $y=0,4\mu\sin 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{4}\right)$ (S.I.) διαδίδεται κατά τη θετική φορά

του άξονα Ox που ταυτίζεται με ελαστική χορδή και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x=0$ όπου $y_{x=0}=0$ και $V_{x=0}>0$.

α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου M που βρίσκεται στη θέση $x_M=1,4m$ τη χρονική στιγμή $t_1=2,95s$. Να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σημείου M σε συνάρτηση με το χρόνο, $V_M=V_M(t)$.

β. Να υπολογιστεί ο αριθμός των σημείων της χορδής που βρίσκονται δεξιά από τη θέση $O(x_0=0)$ και τη χρονική στιγμή $t_2=6,5s$ έχουν ταχύτητα μέτρου $|V|=V_{\max}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Απάντηση

α. Από την εξίσωση $y=0,4\mu\sin 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{4}\right)$ προκύπτει ότι $T=2s$, $\lambda=4m$ και η ταχύτητα

διάδοσης του κύματος $u=\frac{\lambda}{T} \Rightarrow u=2m/s$ (1).

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$y_M=0,4\mu\sin 2\pi\left(\frac{t}{2}-0,35\right)$ (S.I.) (2). Άρα η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου M σε

συνάρτηση με το χρόνο προκύπτει από τη (2): $V_M=0,4\pi\sin 2\pi\left(\frac{t}{2}-0,35\right) \xrightarrow{t_1=2,95s}$

$V_M=0,4\pi\sin 2,25\pi \Rightarrow V_M=0,4\pi\sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow V_M=0,2\sqrt{2}\pi$ m/s.

Αντίθετα η διαδικασία όπου από τη σχέση $y=0,4\mu\sin 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{4}\right)$ για $t=t_1=2,95s$ έχουμε

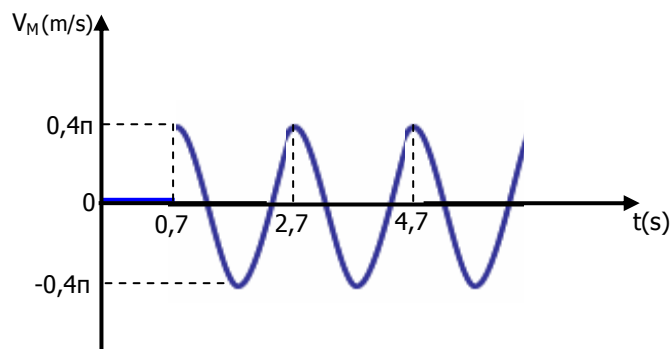
$y=0,4\mu\sin 2\pi\left(1,475-\frac{x}{4}\right)$ και ακολούθως από τη σχέση $V_M=0,4\pi\sin 2\pi\left(1,475-\frac{x}{4}\right) \xrightarrow{x_M=1,4m}$

$V_M=0,4\pi\sin 2,25\pi \Rightarrow V_M=0,4\pi\sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow V_M=0,2\sqrt{2}\pi$ m/s, είναι **ΛΑΘΟΣ**, διότι η σχέση

$V_M=0,4\pi\sin 2\pi\left(1,475-\frac{x}{4}\right)$ δεν προκύπτει από πουθενά.

Το κύμα φθάνει στο σημείο M τη χρονική στιγμή $t=\frac{x_M}{u} \xrightarrow{(1)} t=0,7s$. Η γραφική παράσταση

$V_M=V_M(t)$ είναι:



β. 1^{ος} τρόπος

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης για κάθε σημείο της χορδής έχουμε ότι:
 $E=U+K \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow V^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 y^2 \Rightarrow \frac{|V|^2}{4} = \omega^2 A^2 - \omega^2 y^2 \Rightarrow \frac{\omega^2 A^2}{4} = \omega^2 A^2 - \omega^2 y^2$$

$$\Rightarrow y = \pm A \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ δηλαδή αναζητούμε σημεία της χορδής που τη χρονική στιγμή } t_2 = 6,5 \text{ s}$$

απέχουν από τη θέση ισορροπίας τους απόσταση $|y| = A \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$ και οι θέσεις τους
 πρέπει να απέχουν από τη θέση $x=0$ αποστάσεις $x < \underset{(1)}{u} t_2 \Rightarrow x < 13 \text{ m}$.

Από την εξίσωση του κύματος:

$$y = 0,4 \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) \Rightarrow \pm A \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,4 \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) \Rightarrow \pm 0,2\sqrt{2} = 0,4 \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\mu 2\pi \left(3,25 - \frac{x}{4} \right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\pi \left(3,25 - \frac{x}{4} \right) = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 12,5 - 2k \quad (4) \quad \text{ή} \quad x = 13,5 - 2k \quad (5)$$

$k=0,1,2,\dots$

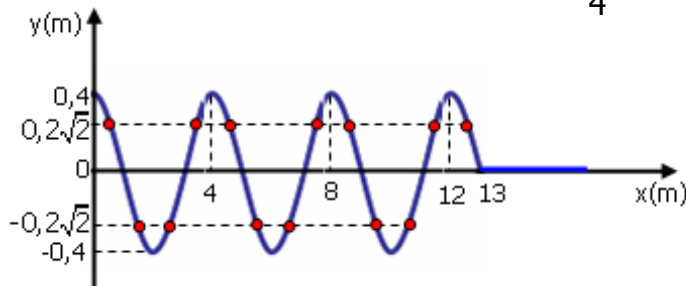
Από την (4): $0 < 12,5 - 2k < 13 \Rightarrow -0,25 < k < 6,25$ άρα $k=0,1,2,3,4,5,6$ και από την (5):
 $0 < 13,5 - 2k < 13 \Rightarrow 0,25 < k < 6,75$ άρα $k=1,2,3,4,5,6$. Συνεπώς υπάρχουν 13 σημεία.

Από τη σχέση $V = 0,4 \mu \sin 2\pi \left(3,25 - \frac{x}{4} \right)$ με αντικατάσταση $\pm V_{\max} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,4 \mu \sin 2\pi \left(3,25 - \frac{x}{4} \right)$
 $\Rightarrow \pm 0,4 \mu \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,4 \mu \sin 2\pi \left(3,25 - \frac{x}{4} \right) \Rightarrow \dots$ προκύπτουν πάλι 13 σημεία αλλά, η σχέση

$V = 0,4 \mu \sin 2\pi \left(3,25 - \frac{x}{4} \right)$ **είναι λάθος.**

2^{ος} τρόπος

Από το στιγμιότυπο του κύματος για τη στιγμή $t = 6,5 \text{ s} = 3T + \frac{T}{4}$:



Υπάρχουν 13 σημεία που τη χρονική στιγμή $t = 6,25 \text{ s}$ έχουν απομάκρυνση

$$y = \pm A \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2\sqrt{2} \text{ m δηλαδή ταχύτητα μέτρου } |V| = V_{\max} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2\pi\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

Ξ. Στεργιάδης