

Θέμα 1^ο

Ο George Atwood (Οκτώβριος 1745 Λονδίνο – 11 Ιουλίου 1807 Λονδίνο) ήταν Άγγλος μαθηματικός που ανακάλυψε την ομώνυμη μηχανή προκειμένου να επιδείξει τα αποτελέσματα των νόμων της κίνησης του Newton. Γεννήθηκε στο Westminster όπου και παρακολούθησε μαθήματα στο Westminster School (πρόκειται για το Royal College of St. Peter in Westminster, ένα δευτεροβάθμιο σχολείο που ιδρύθηκε το 12^ο αιώνα και βρίσκεται μέσα στον περίβολό του Αβαείου του Westminster, οι απόφοιτοί του έχουν την μεγαλύτερη αναλογικά αποδοχή από τα πανεπιστήμια Oxford και Cambridge σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο δευτεροβάθμιο σχολείο ή κολλέγιο της Μ. Βρετανίας).

Το 1765 έγινε δεκτός από το Trinity College στο Cambridge. Αποφοίτησε το 1769 και την ίδια χρονιά ήταν αυτός που πήρε για πρώτη φορά το βραβείο Smith's Prize. Ακολούθως έγινε συνεργάτης και καθηγητής του κολλεγίου και το 1776 εξελέγη μέλος της Royal Society του Λονδίνου. Στην πραγματεία του με τίτλο «*Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies*» το 1784 δίνει μερικά ενδιαφέροντα πειράματα μέσω των οποίων οι αρχές της Μηχανικής μπορούν να επιδειχθούν και να αποδειχθούν. Εκεί περιγράφει και τη μηχανή που φέρει το όνομά του και χρησιμοποιείται για να επιβεβαιωθούν πειραματικά οι νόμοι της απλής επιταχυνόμενης κίνησης.

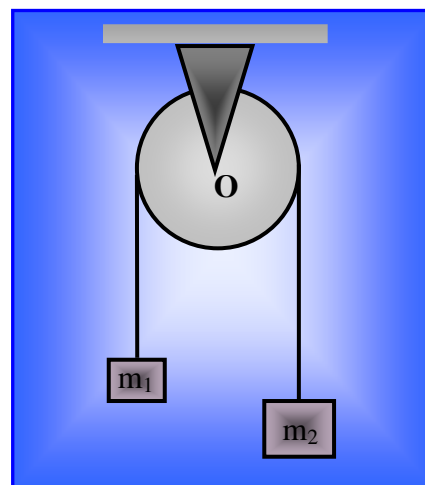
Το 1784 άφησε το Cambridge για το γραφείο ευρεσιτεχνιών και ερευνών των τελωνείων, η εργασία του εκεί θα του δώσει τη δυνατότητα να αφιερώνει το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου του στα μαθηματικά και τη φυσική. Τιμήθηκε από τη Royal Society με το βραβείο Copley Medal το 1796 για την εργασία του σε σχέση με «*την κατασκευή και ανάλυση των γεωμετρικών προϋποθέσεων που καθορίζουν τις θέσεις των σωμάτων που θεωρούνται ομογενή τα οποία επιπλέουν ελεύθερα, και σε ηρεμία, επίσης τον καθορισμό της σταθερότητας των πλοίων και των άλλων επιπλεόντων σωμάτων.*»

Υπήρξε διάσημος σκακιστής της εποχής του και δεν παντρεύτηκε ποτέ. Πέθανε το 1807 στο Westminster και ετάφη εκεί στην εκκλησία της Αγίας Μαργαρίτας. Προς τιμή του ένας κρατήρας στη Σελήνη φέρει το όνομά του.

Μεταβλητές ροπές στη μηχανή Atwood

Η ομογενής τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M=4\text{Kg}$ και ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της O . Στην περιφέρεια της τροχαλίας υπάρχει εγκοπή στην οποία έχει τυλιχθεί νήμα το οποίο δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία, όταν αυτή στρέφεται. Στα άκρα των κατακόρυφων τμημάτων του νήματος έχουν συνδεθεί δύο σώματα με μάζες $m_1=1\text{Kg}$ και $m_2=2\text{Kg}$ αντίστοιχα. Τα σώματα αρχικά συγκρατούνται ακίνητα και το σύστημα ισορροπεί. Τη χρονική στιγμή $t=0$ τα σώματα αφήνονται ελεύθερα και η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται δεχόμενη από τον άξονα ροπή που αντιτίθεται προς την περιστροφή της και είναι της μορφής $\tau = -2Rt$ (S.I.), όπου $R=\eta$ ακτίνα της τροχαλίας και $t = 0$ χρόνος περιστροφής. Τα σώματα μετατοπίζονται κατά τη διεύθυνση των τμημάτων του νήματος τα οποία παραμένουν κατακόρυφα. Να υπολογιστούν:

- α₁.** η επιτάχυνση των σωμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο.
- α₂.** η χρονική στιγμή t_1 στην οποία η ταχύτητα των σωμάτων γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά καθώς και η τιμή της μέγιστης ταχύτητας $v_{\max}$.
- α₃.** η χρονική στιγμή t_2 στην οποία η ταχύτητα των σωμάτων μηδενίζεται για πρώτη φορά.
- α₄.** ο ρυθμός (στιγμιαία ισχύς) με τον οποίο εκτελεί έργο η ροπή από τον άξονα τ , τη χρονική στιγμή t_2 .



Σε κάποια άλλη περίπτωση η ίδια τροχαλία δέχεται από τον άξονα ροπή που αντιτίθεται στην περιστροφή της και είναι της μορφής $\tau = -2R\hat{\theta}$ (S.I), όπου R =η ακτίνα της τροχαλίας και $\hat{\theta}$ =η γωνία περιστροφής της τροχαλίας.

Να υπολογιστούν:

β₁.η κατακόρυφη μετατόπιση h των νημάτων , όταν η ταχύτητά τους μηδενίζεται για πρώτη φορά.

β₂.το έργο που εκτελεί η ροπή τ από τον άξονα στη διάρκεια της προηγούμενης μετατόπισης.

Δίνονται η ροπή αδρανείας της τροχαλίας ως προς τον άξονα

$$\text{περιστροφής της } I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ και } g=10\text{m/s}^2$$

Λύση

α₁.Τα σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα που είναι ίση με την ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας εφ' όσον το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία:

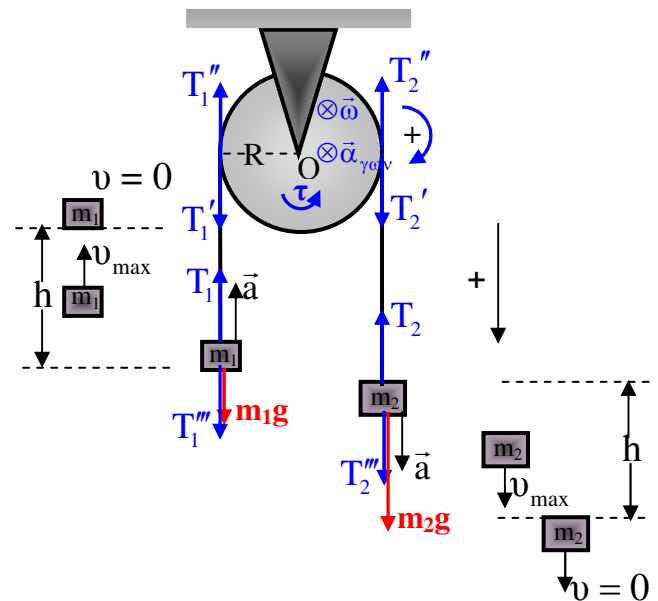
$$v_1 = v_2 = v_{\varepsilon} \Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_{\varepsilon}}{dt} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_{\varepsilon} = a = \alpha_{\gamma\omega\nu}R \quad (1)$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F = 0 \Rightarrow T_1'' - T_1''' = 0 \Rightarrow T_1'' = T_1''' \\ T_1' = T_1''' \quad (\text{δράση - αντίδραση}) \\ T_1 = T_1'' \quad (\text{δράση - αντίδραση}) \end{array} \right\} \Rightarrow T_1 = T_1' \quad (2)$$

και

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F = 0 \Rightarrow T_2'' - T_2''' = 0 \Rightarrow T_2'' = T_2''' \\ T_2' = T_2''' \quad (\text{δράση - αντίδραση}) \\ T_2 = T_2'' \quad (\text{δράση - αντίδραση}) \end{array} \right\} \Rightarrow T_2 = T_2' \quad (3)$$



Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του σώματος m_1 :

$$T_1 - m_1g = m_1a \Rightarrow T_1 = m_1g + m_1a \quad (4)$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του σώματος m_2 :

$$m_2g - T_2 = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2g - m_2a \quad (5)$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας:

$$T_2'R - T_1'R - \tau = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{(1)} T_2 - T_1 - \frac{2Rt}{R} = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{(1)} m_2g - m_2a - m_1g - m_1a - 2t = \frac{1}{2}Ma \quad (4),(5)$$

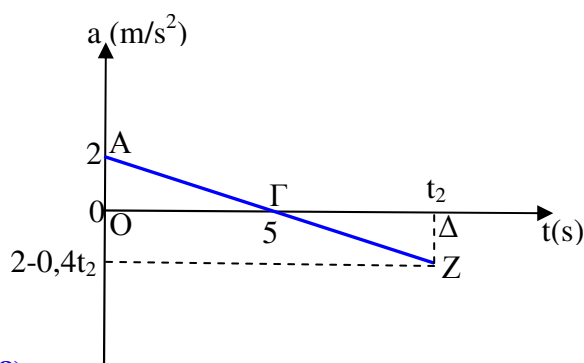
$$\Rightarrow a = \frac{2(m_2 - m_1)g - 4t}{2m_1 + 2m_2 + M} \Rightarrow a = 2 - 0,4t \quad (\text{S.I}) \quad (6)$$

α₂.Η ταχύτητα των σωμάτων γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά, όταν $a=0$.

Από την (6) : $t_1=5\text{s}$. (7)

Ο υπολογισμός της μέγιστης τιμής της ταχύτητας των σωμάτων γίνεται έμμεσα από τον υπολογισμό της μεταβολής της ταχύτητας Δv που με τη σειρά της υπολογίζεται από το διάγραμμα $a-t$ καθώς ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $a(t)$ και τους άξονες :

t(s)	0	5	10
a(m/s ²)	2	0	-2



$$\Delta v = E_{\mu\beta}(OAG) \Rightarrow v_{\max} - 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \Rightarrow v_{\max} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (8)$$

α₃. Από την (6) προκύπτει: $a = 0 \Rightarrow t_1 = 5\text{s}$. Η αρχική ταχύτητα των σωμάτων είναι μηδέν, όταν αυτή θα μηδενιστεί πάλι για πρώτη φορά μετά την έναρξη της κίνησης τη χρονική στιγμή t_1 : $\Delta v = 0$

$$\Delta v = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow E_{\mu\beta}(OAG) + E_{\mu\beta}(\Gamma\Delta Z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} (t_2 - 5)(2 - 0,4t_2) = 0$$

$$\Rightarrow 0,4t_2(t_2 - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 0 \text{ απορρίπτεται } (t_2 > 0) \\ t_2 = 10\text{s} \end{cases}$$

***Ο** παράγοντας $(2 - 0,4t)$ είναι κατά αλγεβρική τιμή και ήδη αρνητικός για $t > 5\text{s}$ επομένως δεν χρειάζεται πρόσημο (-) πριν από το $E_{\mu\beta}(\Gamma\Delta Z)$.

α₄. Ο ρυθμός με τον οποίο εκτελεί έργο η ροπή τ από τον άξονα είναι η στιγμιαία ισχύς:

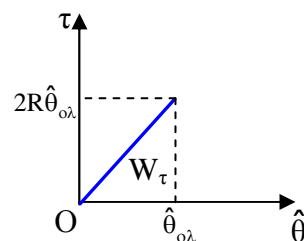
$$P_{\tau(t_1)} = \frac{dW_{\tau}}{dt} \Rightarrow P_{\tau(t_1)} = \tau \cdot \omega \Rightarrow P_{\tau(t_1)} = -2Rt_1 \frac{v_{\varepsilon(t_1)}}{R} \Rightarrow P_{\tau(t_1)} = -2Rt_1 \frac{v_{\max}}{R} \Rightarrow P_{\tau(t_1)} = -2t_1 v_{\max} \quad (7)$$

$$\Rightarrow P_{\tau(t_1)} = -2 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow P_{\tau(t_1)} = -50 \frac{\text{J}}{\text{s}} \quad (8)$$

β₁. Η εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε για το χρονικό διάστημα $0 - t_2$ όπου κάθε σώμα έχει μετατοπιστεί κατά h δίνει:

$$\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_{w_2} + W_{w_1} + W_{\tau} = 0 - 0 \Rightarrow m_2 gh + m_1 gh - |W_{\tau}| = 0 \quad (9)$$

Η ροπή $\tau = -2R\hat{\theta}$ είναι μεταβλητού μέτρου και το έργο της υπολογίζεται γραφικά ως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες $\tau - \hat{\theta}$ και τη γραφική παράσταση της $\tau = \tau(\hat{\theta})$:



$$W_{\tau} = \frac{1}{2} \hat{\theta}_{\text{ολ}} \cdot 2R\hat{\theta}_{\text{ολ}} \Rightarrow W_{\tau} = R \cdot \hat{\theta}_{\text{ολ}}^2 \Rightarrow W_{\tau} = R \left(\frac{\hat{s}}{R} \right)^2 \quad (10), \text{ όπου } \hat{s} = \text{το τόξο κατά το οποίο}$$

περιστράφηκε η τροχαλία μέχρι να μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα της που είναι ίσο με τη μετατόπιση h των σωμάτων διότι το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, $\hat{s} = h$ (11). Άρα από

$$(10) \Rightarrow W_{\tau} = R \frac{h^2}{R^2} \Rightarrow W_{\tau} = \frac{h^2}{R} \Rightarrow W_{\tau} = 5h^2 \quad (12)$$

$$\text{Από } (9) \Rightarrow W_{\tau} = m_2 gh + m_1 gh - 5h^2 = 0 \Rightarrow 30h - 5h^2 = 0 \Rightarrow 5h(6 - h) = 0$$

$$\Rightarrow \{h = 0 (\text{απορρίπτεται γιατί αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή } t = 0) \text{ ή } h = 6\text{m} \quad (13)\}$$

β₂. Από (12) και (13): $W_{\tau} = 5(6)^2 \Rightarrow W_{\tau} = 180\text{J}$.

Θέμα 2^ο

Σε σχέση με τη σύνθεση παράλληλων δυνάμεων που επιδρούν σ' ένα στερεό σώμα:

Από τη σύνθεση δύο **παράλληλων** και **ομόρροπων** δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αποδεικνύεται ότι υπάρχει συνισταμένη $\vec{F}_{12}$, παράλληλη και ομόρροπη προς τις συνιστώσες δυνάμεις για την οποία ισχύει ότι :

α. η συνισταμένη $\vec{F}_{12}$ έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών : $F_{12} = F_1 + F_2$

β. ο φορέας της συνισταμένης F_{12} τέμνει την ευθεία AB που συνδέει τα σημεία εφαρμογής των F_1 και F_2 , A και B αντίστοιχα, σε σημείο O που βρίσκεται μεταξύ των A και B, και την διαιρεί σε τμήματα αντιστρόφως ανάλογα των μέτρων των δυνάμεων: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{(OB)}{(OA)}$

γ. ως συνακόλουθο της προηγούμενης πρότασης, κάθε μία από τις τρεις δυνάμεις έχει μέτρο ανάλογο της απόστασης των σημείων εφαρμογής των άλλων δύο: $\frac{F_1}{(OB)} = \frac{F_2}{(OA)} = \frac{F_{12}}{(AB)}$.

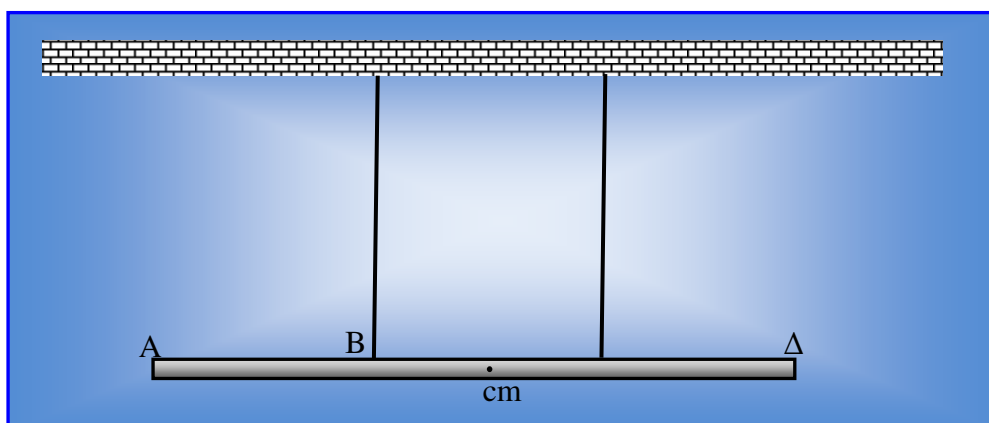
Αντίστοιχα από τη σύνθεση δύο **παράλληλων**, **αντίρροπων** και **άνισων** δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αποδεικνύεται ότι υπάρχει συνισταμένη $\vec{F}_{12}$, παράλληλη προς τις δύο συνιστώσες δυνάμεις και ομόρροπη προς τη συνιστώσα δύναμη μεγαλύτερου μέτρου για την οποία ισχύει ότι:

α. η συνισταμένη $\vec{F}_{12}$ έχει μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων των συνιστωσών : $F_{12} = F_1 - F_2$

β. ο φορέας της συνισταμένης F_{12} τέμνει την ευθεία AB που συνδέει τα σημεία εφαρμογής των F_1 και F_2 , A και B αντίστοιχα, σε σημείο O που βρίσκεται εκτός του ευθύγραμμου τμήματος AB και προς το μέρος της δύναμης μεγαλύτερου μέτρου και απέχει από τα σημεία A και B αποστάσεις που είναι αντιστρόφως ανάλογες των μέτρων των δυνάμεων: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{(OB)}{(OA)}$

γ. ως συνακόλουθο της προηγούμενης πρότασης, κάθε μία από τις τρεις δυνάμεις έχει μέτρο ανάλογο της απόστασης των σημείων εφαρμογής των άλλων δύο: $\frac{F_1}{(OB)} = \frac{F_2}{(OA)} = \frac{F_{12}}{(AB)}$.

Ισορροπία με πλεονάζουσα δύναμη.

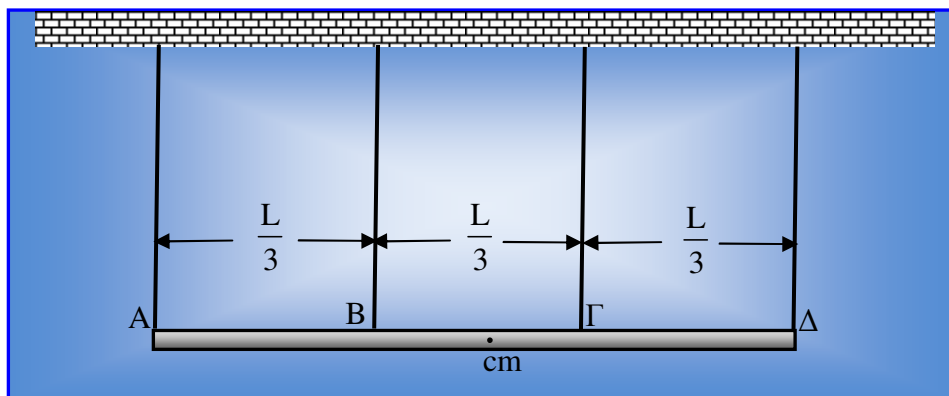


Μία ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους L και μάζας m πρόκειται να αναρτηθεί από οροφή. Διαθέτουμε σύρματα του ίδιου μήκους, αμελητέας μάζας και της ίδιας σκληρότητας. Η ράβδος μπορεί να κινηθεί μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο. Δίνεται η ένταση του πεδίου βαρύτητας g .

α₁. Αποφασίζουμε να αναρτήσουμε τη ράβδο με τη βοήθεια δύο συρμάτων που συνδέονται στα σημεία Β και Γ της ράβδου και απέχουν από το κέντρο μάζας της αποστάσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα σύρματα στη ράβδο, όταν αυτή ισορροπεί.

α₂. Να υπολογίσετε τις τιμές των δυνάμεων του προηγούμενου ερωτήματος, όταν $x_1 = x_2 = \frac{L}{6}$.

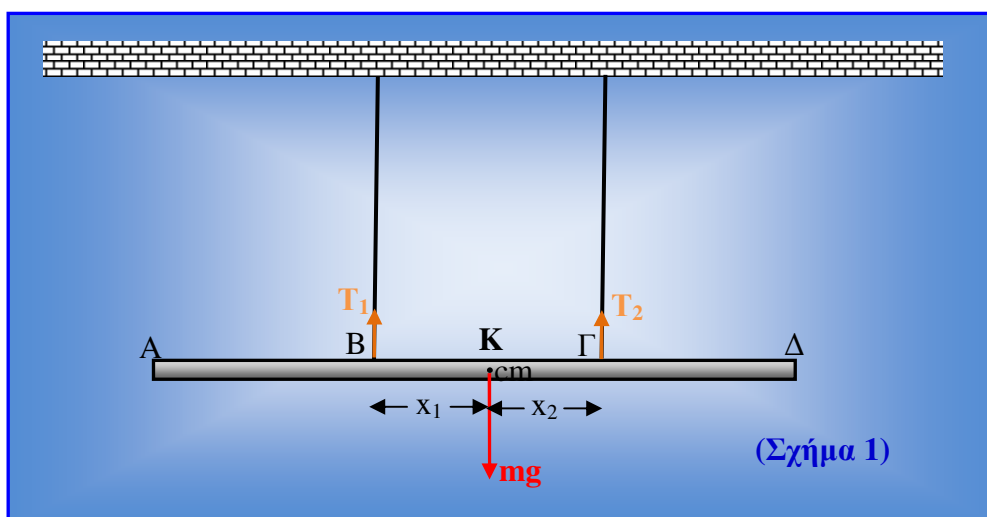
β.



Σε άλλη περίπτωση η ράβδος αναρτάται με τη βοήθεια τεσσάρων συρμάτων, όπου εκτός των δύο συρμάτων που έχουν συνδεθεί στα σημεία Β και Γ, τα άλλα δύο έχουν συνδεθεί στα άκρα της ράβδου Α και Δ. Ενώ η ράβδος ισορροπεί αποφασίζουμε να κόψουμε το ένα από τα σύρματα που έχουν συνδεθεί στα άκρα της. Αν η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί να γράψετε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις συνθήκες ισορροπίας της ράβδου. Είναι δυνατόν να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων των συρμάτων που παραμένουν συνδεδεμένα με τη ράβδο;

Λύση

α₁.



Οι δυνάμεις T_1 και T_2 είναι παράλληλες και ομόρροπες και σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην εισαγωγή η συνισταμένη τους T_{12} είναι παράλληλη και ομόρροπη με αυτές και έχει μέτρο :

$$T_1 + T_2 = T_{12} \quad (1).$$

Οι συνθήκες ισορροπίας της ράβδου λόγω της απουσίας δυνάμεων στην οριζόντια διεύθυνση, είναι

$$\vec{\Sigma F}_y = 0 \Rightarrow T_{12} - mg = 0 \Rightarrow T_{12} = mg \quad (2) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow \tau_{W(cm)}^0 + \tau_{T_{12}(cm)} = 0 \Rightarrow \tau_{T_{12}(cm)} = 0 \quad (3)$$

Η συνθήκη (3) επιβάλλει το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης T_{12} να βρίσκεται στο κέντρο μάζας K της ράβδου γιατί σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η T_{12} και το βάρος W της ράβδου θα συναποτελούσαν ζεύγος δυνάμεων που θα έστρεφε τη ράβδο.

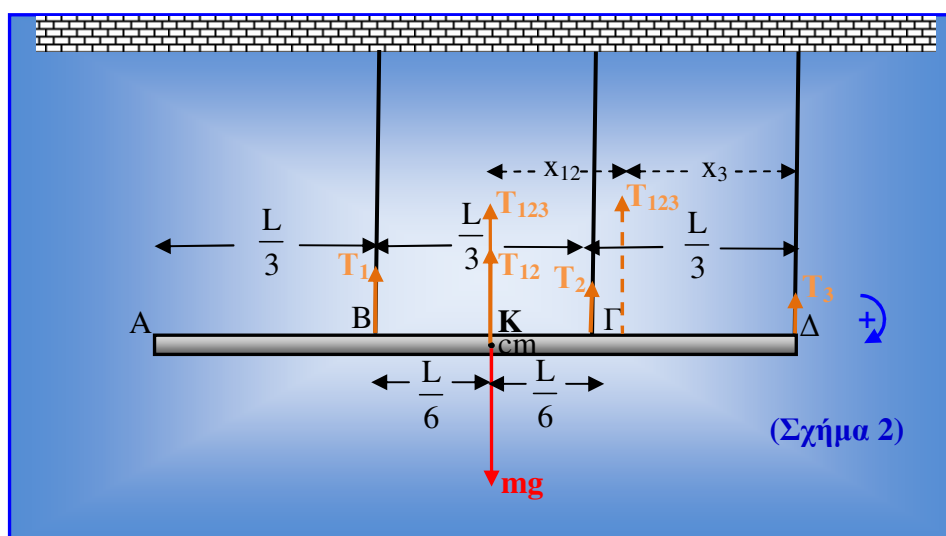
Τα μέτρα των δυνάμεων T_1, T_2 και T_{12} συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{T_1}{x_2} = \frac{T_2}{x_1} = \frac{T_{12}}{x_1 + x_2} \xrightarrow{(1)} \frac{T_1}{x_2} = \frac{T_2}{x_1} = \frac{mg}{x_1 + x_2} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} mg & (4) \\ T_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} mg & (5) \end{cases}$$

α₂. Από τις (4) και (5) (Σχήμα 1) :

$$\text{για } x_1 = x_2 = \frac{L}{6} \text{ προκύπτει : } T_1 = T_2 = \frac{mg}{2}.$$

β.



Μετά την κοπή του σύρματος που συνδέεται σ' ένα άκρο της ράβδου (έστω στο άκρο A) επειδή η ράβδος συνεχίζει να ισορροπεί από τις συνθήκες ισορροπίας θα έχουμε (Σχήμα 2):

$$\vec{\Sigma F}_y = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 = mg \quad (6) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow T_1 \frac{L}{6} - T_2 \frac{L}{6} - T_3 \frac{3L}{6} = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 - 3T_3 = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 - 3T_3 = T_2 \quad (7).$$

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (6) και (7) οι τιμές των δυνάμεων των συρμάτων T_1, T_2, T_3 δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν.

Σχόλιο 1

Αν επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δυνάμεων T_1, T_2 και T_3 , οι οποίες είναι παράλληλες και ομόρροπες, η πορεία θα είναι η εξής:

Συνθέτουμε τις T_1 και T_2 και βρίσκουμε τη συνισταμένη τους T_{12} για την οποία από το ερώτημα **α₂** έχουμε βρει ότι το μέτρο της είναι $T_{12} = T_1 + T_2$ καθώς και ότι το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται στο κέντρο μάζας K της ράβδου. Στη συνέχεια επιχειρούμε να συνθέσουμε την T_{12} με την T_3 προκειμένου να προσδιορίσουμε τη συνισταμένη τους T_{123} , επειδή οι T_{12} και T_3 είναι παράλληλες

και ομόρροπες έχουμε: $\frac{T_{12}}{x_3} = \frac{T_3}{x_{12}} = \frac{T_{123}}{(K\Delta)}$ (8), όπου x_{12} και x_3 οι αποστάσεις του σημείου

εφαρμογής της T_{123} από τα K και Δ . Όμως, η T_{123} θα πρέπει να έχει σημείο εφαρμογής το K γιατί

σε άλλη περίπτωση με το βάρος W θα συναποτελούσαν ζεύγος και η ράβδος θα στρεφόταν. Αλλά τότε $x_{12} \rightarrow 0$ και $x_3 \rightarrow (K\Delta)$ και σύμφωνα με τη σχέση (8):

$$T_{12} = T_{123} \Rightarrow T_1 + T_2 = T_1 + T_2 + T_3 \Rightarrow T_3 = 0!$$

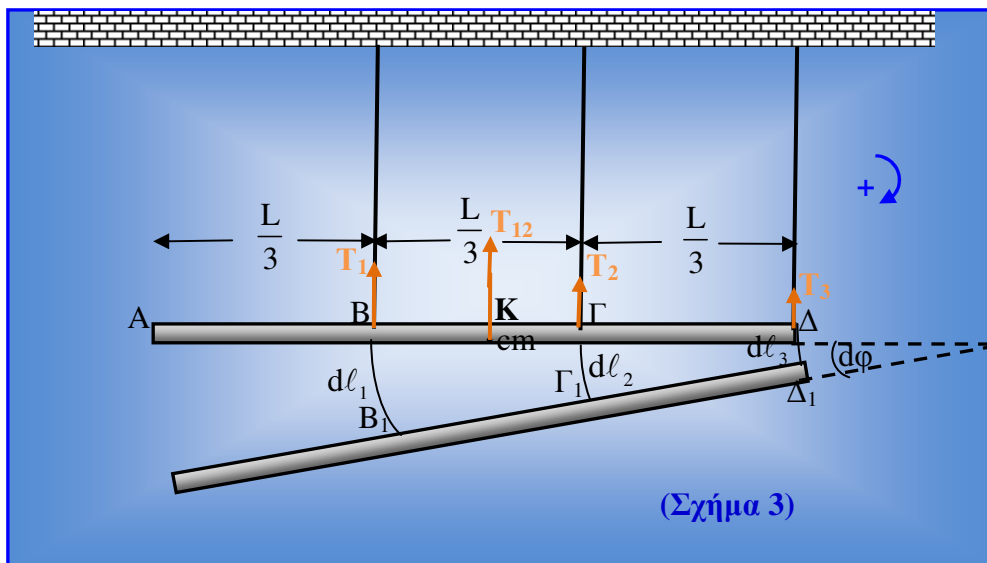
Το τελευταίο συμπέρασμα μας θυμίζει ότι η ράβδος μπορούσε να ισορροπεί συνδεδεμένη μόνο με δύο σύρματα όπως δείξαμε στο ερώτημα α_1 .

Το ενδεχόμενο η T_3 να είναι πολύ μεγαλύτερη από την T_{12} ($T_3 \gg T_{12}$) απορρίπτεται γιατί τότε το σημείο εφαρμογής της T_{123} θα πλησιάζει το σημείο Δ , ενώ όπως εξηγήθηκε το σημείο εφαρμογής της πρέπει να βρίσκεται στο κέντρο μάζας K .

Σχόλιο 2 (Μια χρήσιμη παρέκβαση)

Όπως διαπιστώσαμε ο προσδιορισμός των T_1, T_2 και T_3 δεν είναι δυνατός διότι από τις δύο συνθήκες ισορροπίας (δυνατότητα κίνησης στην κατακόρυφη διεύθυνση και δυνατότητα περιστροφής) καταλήξαμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με 3 αγνώστους. Όμως, «πενία εξισώσεων τέχνας κατεργάζεται».

Τα σύρματα έχουν σημαντική ακαμψία, προφανώς δεν είναι ελαστικά σώματα. Αν υποθέσουμε ότι μετά την κοπή του ενός σύρματος η ράβδος στρέφεται από τη θέση ισορροπίας της κατά μία απειροστή γωνία $d\phi$, τότε αποδίδοντας στα σύρματα «ελαστικές ιδιότητες» δεχόμαστε ότι αυτά λόγω της ακαμψίας τους υφίστανται απειροστές επιμηκύνσεις $d\ell_1$, $d\ell_2$ και $d\ell_3$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3** (σε μεγέθυνση προκειμένου να περιγραφεί ο προτεινόμενος τρόπος επίλυσης):



Από το τραπέζιο των απειροστών επιμηκύνσεων $B\Delta_1B_1$ για τη μεσοπαράλληλο $\Gamma\Gamma_1 = d\ell_2$ έχουμε:

$d\ell_2 = \frac{d\ell_1 + d\ell_3}{2}$ και επειδή τα σύρματα είναι όμοια τους αποδίδουμε «ίδια σταθερά ελαστικότητας

k », οπότε η τελευταία σχέση γράφεται: $\frac{T_2}{k} = \frac{\frac{T_1}{k} + \frac{T_3}{k}}{2} \Rightarrow \frac{T_2}{k} = \frac{T_1 + T_3}{2k} \Rightarrow T_1 + T_3 = 2T_2$ (8)

Τώρα οι $T_1 + T_2 + T_3 = mg$ (6), $T_1 - 3T_3 = T_2$ (7) και (8) αποτελούν σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Από (6) $\xrightarrow{(8)} 3T_2 = mg \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{3}$ (9).

Από (7) - (8): $T_1 - 3T_3 - T_1 - T_3 = T_2 - 2T_2 \Rightarrow T_3 = \frac{T_2}{4} \Rightarrow T_3 = \frac{mg}{12}$ (10).

Από (6) $\Rightarrow T_1 = mg - \frac{mg}{3} - \frac{mg}{12} \Rightarrow T_1 = \frac{7mg}{12}$.

Η παρέκβαση (λαθροχειρία...) μάλλον απέδωσε.

Θέμα 3^ο

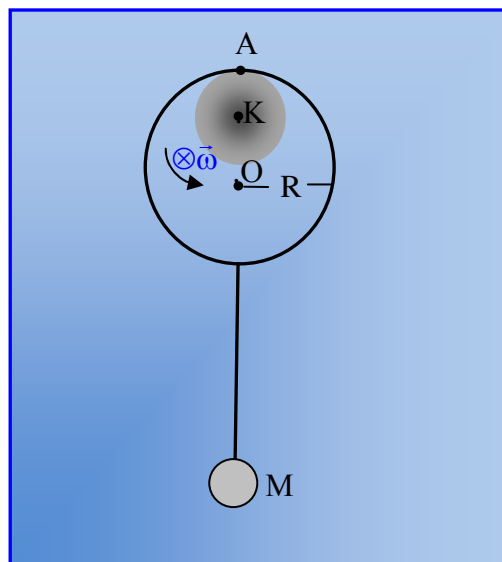
Ένα ιδιότυπο εκκρεμές.

Από το ίδιο ομογενές και αμελητέου πάχους σύρμα δημιουργούμε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας R ενώ το υπόλοιπο του σύρματος έχει τη μορφή μιας ράβδου αμελητέου πάχους και μήκους L . Στο άκρο του ευθύγραμμου τμήματος του σύρματος προσκολλάται μικρός δίσκος μάζας M αμελητέου πάχους. Η μάζα του σύρματος θεωρείται αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του δίσκου. Η στεφάνη τοποθετείται πάνω σε σταθερό άξονα που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω , με το ανώτερο σημείο της A να εφάπτεται στο ανώτερο σημείο του άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ στεφάνης και άξονα είναι μ . Το σύστημα στεφάνη – ράβδος – δίσκος αποτελεί ένα εκκρεμές που κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο.

α. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις παραμέτρους R , L και μ , ώστε να υπάρχει θέση ισορροπίας για το εκκρεμές.

β. Να προσδιοριστούν οι τιμές του συντελεστή τριβής ολίσθησης μ , ώστε να υπάρχει θέση ισορροπίας του εκκρεμούς.

γ. Να προσδιορίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την αρχική κατακόρυφη θέση της, όταν το εκκρεμές βρεθεί για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας του.



Λύση

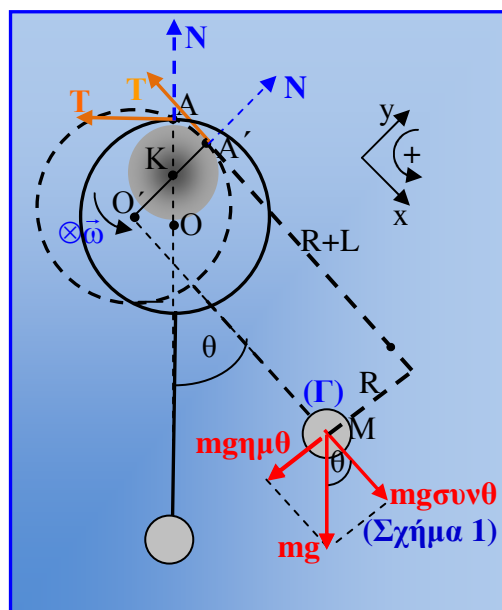
α. Όταν τοποθετούμε τη στεφάνη πάνω στον άξονα, το σύστημα στεφάνη – ράβδος – δίσκος δέχεται την επίδραση της βαρυτικής δύναμης του δίσκου, της τριβής ολίσθησης που δέχεται η στεφάνη από τον άξονα και της κάθετης αντίδρασης N του άξονα στη στεφάνη (οι δύο αυτές δυνάμεις αποτελούν τις συνιστώσες της δύναμης που ασκεί ο άξονας στη στεφάνη). Με την επίδραση της τριβής ολίσθησης η στεφάνη ολισθαίνει κατά τη διεύθυνση της εκάστοτε εφαπτομένης (xx') στο σημείο επαφής της με τον άξονα.

Όταν το σύστημα βρεθεί στη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά (Σχήμα 1) έχουμε,

$$xx': \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = mg \sin \theta \quad (1)$$

Κατά τη διεύθυνση της ακτίνας της στεφάνης (yy') δεν υπάρχει κίνηση: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta \quad (2)$

Επίσης, το σύστημα στεφάνη – ράβδος – δίσκος στρέφεται, από το 2^ο Νόμο του Newton έχουμε:



$\Sigma \tau_{(Γ)} = I \alpha_{\gamma_{\omega \nu}}$ και όταν το σύστημα βρεθεί στη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά (**Σχήμα 1**) από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(Γ)} = 0 \Rightarrow TR - N(R + L) = 0 \Rightarrow \mu NR = N(R + L) \Rightarrow \mu R = R + L \Rightarrow R(\mu - 1) = L \quad (3)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί τη ζητούμενη συνθήκη.

β. Από την (3) πρέπει: $\mu > 1$

γ. Από την συνθήκη ισορροπίας $\Sigma \tau_{(Γ)} = 0 \xRightarrow{(1)} mgR \sin \hat{\theta} - mg(R + L) \eta \mu \hat{\theta} = 0 \xRightarrow{(2)}$

$$R^2(1 - \eta \mu^2 \hat{\theta}) = (R + L)^2 \eta \mu^2 \hat{\theta} \Rightarrow R \sin \hat{\theta} = (R + L) \eta \mu \hat{\theta} \Rightarrow R^2 \sin^2 \hat{\theta} = (R + L)^2 \eta \mu^2 \hat{\theta} \Rightarrow$$

$$\eta \mu^2 \hat{\theta} = \frac{R^2}{R^2 + (R + L)^2} \xRightarrow{(3)} \eta \mu^2 \hat{\theta} = \frac{R^2}{R^2 + \mu^2 R^2} \Rightarrow \eta \mu \hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Ε. Στεργιάδης