

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2013

ΘΕΜΑ 1°

Να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό καθεμιάς από τις ακόλουθες ημιτελείς προτάσεις 1- 4 και δίπλα της το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμά της.

1. Ραδιοφωνικός δέκτης περιέχει ιδανικό κύκλωμα LC για την επιλογή σταθμών. Ένας ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει σε συχνότητα μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα του ιδανικού κυκλώματος LC. Για να συντονιστεί ο δέκτης με το σταθμό πρέπει:

- α. να αυξήσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.
- β. να μειώσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.
- γ. να μειώσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου.
- δ. να μειώσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου και τη χωρητικότητα του πυκνωτή.

(Μονάδες 5)

2. Όταν ακτίνα μονοχρωματικού φωτός περνάει από τον αέρα στο γυαλί:

- α. η διεύθυνση διάδοσής της αλλάζει πάντοτε.
- β. η ταχύτητα διάδοσης του φωτός δε μεταβάλλεται.
- γ. η συχνότητά του ελαττώνεται.
- δ. το μήκος κύματός του ελαττώνεται.

(Μονάδες 5)

3. Όταν σ' ένα στερεό σώμα που ηρεμεί επιδράσει ζεύγος δυνάμεων:

- α. το μέτρο της ορμής του παραμένει μηδέν.
- β. το μέτρο της ορμής του αυξάνεται.
- γ. το μέτρο της ορμής του αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια ελαττώνεται.
- δ. η κατεύθυνση του διανύσματος της ορμής αλλάζει.

(Μονάδες 5)

4. Η συχνότητα μιας εξαναγκασμένης αρμονικής ταλάντωσης την οποία εκτελεί μηχανικό σύστημα με σταθερά απόσβεσης $b \neq 0$, όταν έχει αποκατασταθεί σ' αυτό μόνιμη κατάσταση:

- α. είναι πάντοτε ίση με την ιδιοσυχνότητά του.
- β. εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης.
- γ. είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη.
- δ. είναι ίση με το διπλάσιο της ιδιοσυχνότητάς του.

(Μονάδες 5)

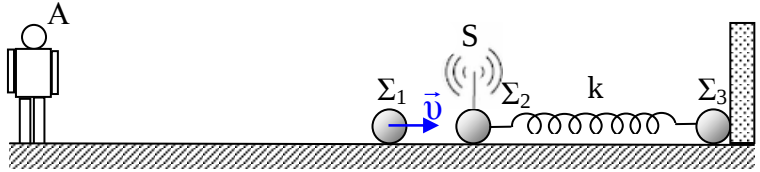
5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Στην απλή αρμονική ταλάντωση τα διανύσματα της ταχύτητας $\vec{v}$ και $\vec{a}$, όταν δεν είναι μηδενικά, είναι πάντοτε αντίρροπα.
- β. Σε μηχανικό σύστημα που εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με την επίδραση δύναμης αντίστασης της μορφής $F_{αντ} = -bv$ ο ρυθμός ελάττωσης του πλάτους αυξάνεται όταν η σταθερά απόσβεσης b μεγαλώνει.
- γ. Η υπεριώδης ακτινοβολία στο κενό διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα από την υπέρυθη ακτινοβολία.
- δ. Η πλαστική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών είναι πάντοτε κεντρική.
- ε. Ο λόγος που ένα κατεργασμένο διαμάντι με πολλές έδρες λαμποκοπά στο φως είναι η μεγάλη κρίσιμη γωνία που παρουσιάζει ως προς τον αέρα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2°

A₁. Τρεις όμοιες ελαστικές σφαίρες Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 έχουν μάζες $m_1=m_2=m_3=m$. Η σφαίρα Σ_2 φέρει ηχητική πηγή S που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s και είναι συνδεδεμένη μέσω ιδανικού ελατηρίου



σταθεράς k με τη σφαίρα Σ_3 η οποία είναι σε επαφή με ακλόνητο κατακόρυφο εμπόδιο, το σύστημα είναι ακίνητο πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Εκτοξεύουμε τη σφαίρα Σ_1 προς τη σφαίρα Σ_2 με

ταχύτητα μέτρου $v = \frac{v_{\eta\chi}}{50}$, όπου $v_{\eta\chi}$ = η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, κατά τη διεύθυνση του άξονα

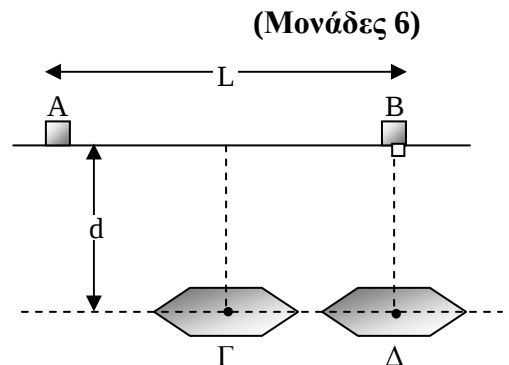
του ελατηρίου και αυτές συγκρούονται τελείως ελαστικά και κεντρικά, χωρίς η κρούση να διαταράξει τη λειτουργία της ηχητικής πηγής S . Μετά την κρούση των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 η σφαίρα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο παρατηρητής A που βρίσκεται αρκετά κοντά στο σύστημα των σφαιρών και στην ίδια διεύθυνση με τον άξονα του ελατηρίου, ακούει με μικρή χρονική καθυστέρηση τον ήχο που εξέπεμψε η ηχητική πηγή τη χρονική στιγμή που η συσπείρωση του ελατηρίου έγινε μέγιστη, ως ήχο συχνότητας f_1 . Αποσύρουμε το κατακόρυφο εμπόδιο και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία της κρούσης με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, σ' αυτή την περίπτωση ο παρατηρητής A ακούει με μικρή χρονική καθυστέρηση τον ήχο που εξέπεμψε η ηχητική πηγή, όταν το ελατήριο απέκτησε μέγιστη συσπείρωση για πρώτη φορά, ως ήχο συχνότητας f_2 . Για τις τιμές των f_1 και f_2 ισχύει:

α. $\frac{f_1}{f_2} = \frac{101}{100}$ β. $\frac{f_1}{f_2} = \frac{102}{101}$ γ. $\frac{f_1}{f_2} = 1$

(Μονάδες 3)

A₂. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B₁. Το πλοίο του σχήματος ταξιδεύει σε ευθύγραμμη πορεία παράλληλα προς την ακτή και σε απόσταση $d=600\text{m}$ από αυτήν. Ο ασύρματος του πλοίου δέχεται ταυτόχρονα δύο σήματα (ηλεκτρομαγνητικά κύματα) της ίδιας συχνότητας από τις κεραίες δύο παράκτιων σταθμών A και B που απέχουν απόσταση $L=600\sqrt{3}\text{m}$. Τα δύο ηλεκτρομαγνητικά κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά, όταν ο ασύρματος του πλοίου βρίσκεται στη θέση Γ , η οποία ισαπέχει από τους σταθμούς A και B . Ο ασύρματος του πλοίου δεν καταγράφει



σήμα από τους δύο σταθμούς, όταν βρεθεί στη θέση Δ που βρίσκεται στην κάθετη προς την ακτή που διέρχεται από τη θέση του σταθμού B , για δεύτερη φορά μετά την διέλευση του από τη θέση Γ .

Το μήκος κύματος λ των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εκπέμπουν οι δύο σταθμοί είναι

α. 240m β. 400m γ. 600m

(Μονάδες 3)

B₂. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ₁. Το ποδήλατο του σχήματος κινείται με ταχύτητα μέτρου v σε οριζόντιο δρόμο. Ο σκελετός του ποδηλάτου έχει μάζα M και ο καθένας από τους δύο τροχούς του ακτίνα R και μάζα m που θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρεια του. Οι τροχοί κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν και παρουσιάζουν ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής τους $I=m R^2$. Αν η



ολική κινητική ενέργεια του ποδηλάτου είναι $K=\frac{2}{3} M v^2$, η μάζα

m του κάθε τροχού είναι :

α. $\frac{M}{12}$ β. $\frac{M}{9}$ γ. $\frac{M}{6}$

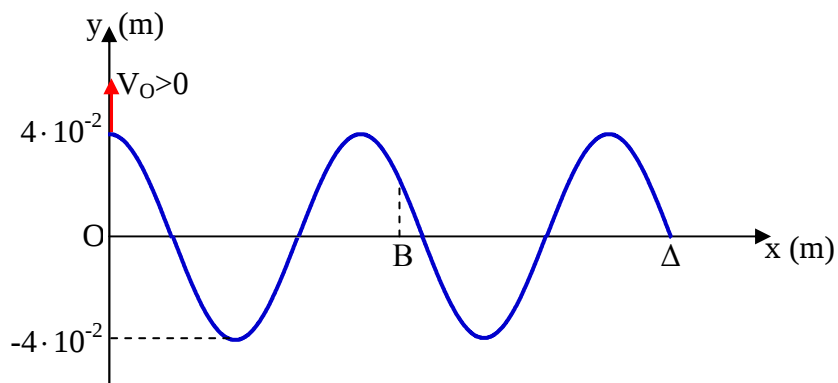
(Μονάδες 3)

Γ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο διάγραμμα του σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί στο τμήμα ΟΔ ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που εκτείνεται στη διεύθυνση Οx και η ταχύτητα του σημείου που βρίσκεται στη θέση Ο. Το στάσιμο κύμα έχει προκύψει από τη συμβολή δύο τρεχόντων



αρμονικών κυμάτων που διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, έχουν το ίδιο πλάτος, το ίδιο μήκος κύματος λ και την ίδια συχνότητα $f = 5\text{Hz}$. Στη θέση Ο ($x=0$), που είναι θέση κοιλίας, τη χρονική στιγμή $t=0$ η απομάκρυνση είναι $y_{(0)}=0$ και η ταχύτητα $V_{(0)} > 0$. Εάν το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις κοιλιών του στάσιμου κύματος είναι $0,8\pi \text{ m/s}$ και το σημείο Δ βρίσκεται στη θέση $x_{\Delta}=1,35\text{m}$:

Α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος και τις εξισώσεις των αρμονικών κυμάτων που συνέβαλλαν για να σχηματιστεί το στάσιμο κύμα. Τα μεγέθη να δοθούν σε μονάδες στο (S.I).

(Μονάδες 8)

Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου Β του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση $x_B=0,7\text{m}$ τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο δοθέν στιγμιότυπο του κύματος.

(Μονάδες 6)

Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου που απέχει από τον πλησιέστερο προς αυτό δεσμό απόσταση $\frac{\lambda}{6}$, όπου $\lambda =$ το μήκος κύματος των τρεχόντων αρμονικών κυμάτων που συνέβαλλαν για να σχηματιστεί το στάσιμο κύμα.

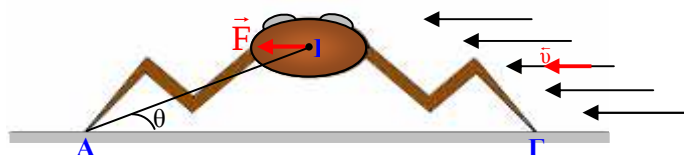
(Μονάδες 6)

Δ. Να σχεδιάσετε στο **μιλιομετρέ** χαρτί που υπάρχει στο τέλος του τετραδίου σας, το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t=0,15\text{s}$ και για το τμήμα ΟΔ του ελαστικού μέσου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Το έντομο του σχήματος έχει μάζα $m=3 \cdot 10^{-4} \text{ Kg}$ και είναι ακίνητο πάνω στο οριζόντιο έδαφος. Στην περιοχή πνέει άνεμος που έχει την κατεύθυνση του σχήματος με αποτέλεσμα στο έντομο να ασκείται



οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας το μέτρο δίνεται από τη σχέση $F=8 \cdot 10^{-4} v$ (S.I), όπου v το μέτρο της ταχύτητας του ανέμου. Το έντομο συμπεριφέρεται ως μηχανικό στερεό κέντρο μάζας Κ και στηρίζεται σε δύο μόνο άκρα του στα σημεία Α και Γ με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρεί το άκρο του Α ακίνητο, η γωνία $\hat{\theta}$ να είναι τέτοια, ώστε $\eta \mu \hat{\theta}=0,6$ και $\eta \sigma \nu \hat{\theta}=0,8$, η απόσταση (ΚΑ) να είναι $(ΚΑ)=r=2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ και το σχήμα του να είναι συμμετρικό ως προς το κέντρο μάζας του Κ. Θεωρούμε ότι η δύναμη F ασκείται στο κέντρο μάζας Κ του εντόμου, να υπολογίσετε :

Α₁. Την μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του ανέμου για την οποία το έντομο δεν ανατρέπεται.

(Μονάδες 5)

Α₂. Το έντομο μπορεί να επιλέγει τη στάση που θα πάρει κάθε φορά ως προς το έδαφος. Σε κάθε στάση του αντιστοιχεί μια διαφορετική τιμή της γωνίας $\hat{\theta}$ και της απόστασης των άκρων του ΑΓ καθώς και μια διαφορετική μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του ανέμου για την οποία αυτό δεν ανατρέπεται. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη ότι η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του ανέμου για την οποία το έντομο δεν ανατρέπεται αυξάνεται, όταν αυξάνεται η γωνία

$\hat{\theta}, (0 < \hat{\theta} < \frac{\pi}{2})$ rad, με την οποία αυτό επιλέγει κάθε φορά να σταθεί ως προς το έδαφος;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Κάποια χρονική στιγμή μια ριπή του ανέμου τριπλασιάζει το μέτρο της ταχύτητας του ανέμου, σε σχέση με τη μέγιστη τιμή του για την οποία το έντομο δεν ανατρέπεται, με αποτέλεσμα αυτό να αρχίσει να περιστρέφεται περί σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ακίνητο άκρο του Α και είναι κάθετος στο κατακόρυφο επίπεδο περιστροφής του. Όταν το άκρο Γ του εντόμου βρεθεί στην κατακόρυφη που διέρχεται από το Α, η γωνιακή του ταχύτητα έχει μέτρο $\omega = 18$ rad/s, για αυτή τη θέση του εντόμου να υπολογίσετε:

(Μονάδες 4)

B₁. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του, το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας του Κ, τη στροφορμή του εντόμου και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας

(Μονάδες 6)

B₂. το μέτρο της κάθετης προς το έδαφος δύναμης και το μέτρο της στατικής τριβής που ασκεί το έδαφος στο άκρο Α του εντόμου.

(Μονάδες 5)

Γ₁. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F του αέρα κατά την περιστροφή του εντόμου και μέχρι το άκρο του Γ να βρεθεί στην κατακόρυφη που διέρχεται από το Α και το (%) ποσοστό του προηγούμενου έργου που μετατράπηκε σε αύξηση της κινητικής ενέργειας του εντόμου.

(Μονάδες 5)

Δίνονται η ροπή αδρανείας του εντόμου ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετος στο κατακόρυφο επίπεδο περιστροφής του εντόμου $I_A = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

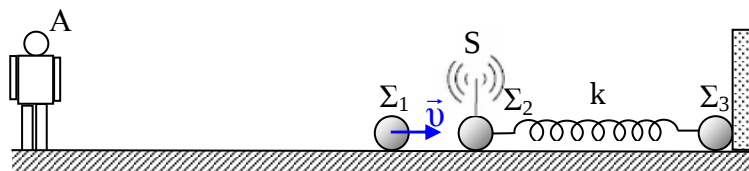
ΘΕΜΑ 1^ο

1. α 2. δ 3. α 4. γ 5. α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Λάθος

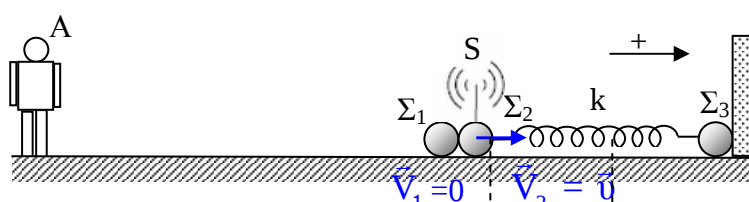
ΘΕΜΑ 2^ο

A₁. α

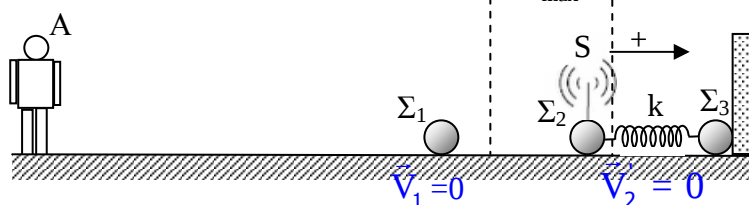
A₂.



(Σχήμα α)



(Σχήμα β)



(Σχήμα γ)

Όταν υπάρχει το ακλόνητο εμπόδιο:

Για την ελαστική κεντρική κρούση των σφαιρών Σ₁ και Σ₂ έχουμε:

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{P}_{\text{ΟΛ (πριν την κρούση)}} = \vec{P}_{\text{ΟΛ (μετά την κρούση)}} \Rightarrow m_1 v = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad (m_1 = m_2) \Rightarrow v = V_1 + V_2 \quad (1)$$

Από τη Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος:

$$K_{\text{ΟΛ πριν}} = K_{\text{ΟΛ μετά}} : \frac{1}{2} m_1 v^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (m_1 = m_2) \Rightarrow v^2 = V_1^2 + V_2^2 \quad (2)$$

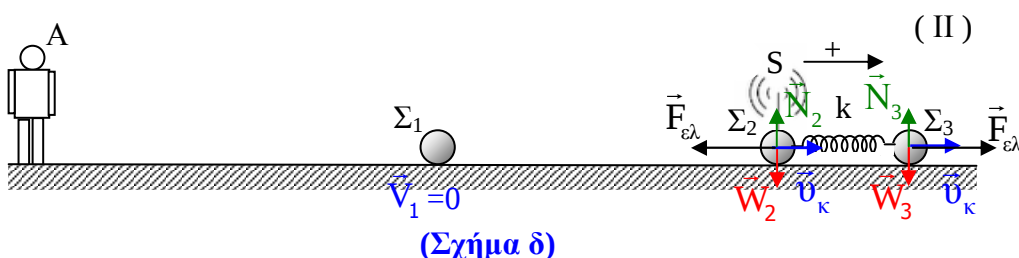
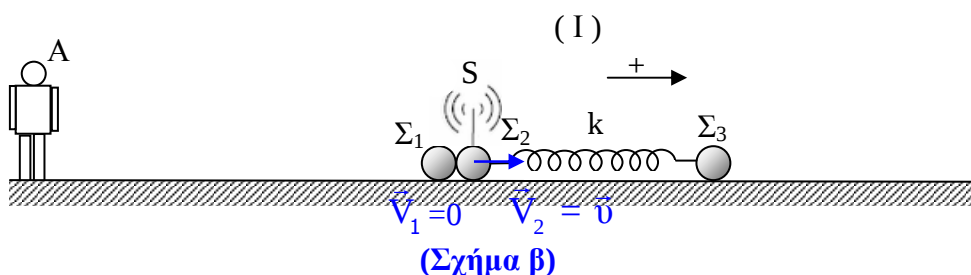
$$\text{Από (1) και (2):} \quad \begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= v \end{aligned} \quad (3)$$

Το Σ₂ μετά την ελαστική κρούση (Σχήμα β) εκτελεί α.α.τ και η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου αντιστοιχεί στην ακραία θέση της ταλάντωσης, όπου στιγμιαία η ταχύτητα της σφαίρας Σ₂ γίνεται V₂'=0 (Σχήμα γ). Ο ήχος που εκπέμπει τότε η ηχητική πηγή προς τον παρατηρητή Α θα φθάσει σ' αυτόν με μικρή χρονική καθυστέρηση ως ήχος συχνότητας f₁=f_s (4).

Όταν αποσύρουμε το ακλόνητο εμπόδιο και επαναλάβουμε τη διαδικασία με τον ίδιο ακριβώς τρόπο:

Η σφαίρα Σ₂ μετά την ελαστική κρούση θα κινηθεί προς τα δεξιά με αρχική ταχύτητα V₂=v, δηλαδή ίδια με αυτή που υπολογίστηκε προηγουμένως (3). Τώρα όμως καθώς το ελατήριο συμπιέζεται ασκεί δύναμη επαναφοράς στη σφαίρα Σ₂ η οποία επιβραδύνεται, αλλά και στη σφαίρα Σ₃ η οποία αρχίζει να επιταχύνεται προς τα δεξιά καθώς είναι ελεύθερη να κινηθεί. Όσο η ταχύτητα της σφαίρας Σ₂ είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα της σφαίρας Σ₃ η μία σφαίρα πλησιάζει την

άλλη και το ελατήριο συσπείρώνεται. Το ελατήριο θα βρεθεί στην κατάσταση μέγιστης συσπείρωσής του τη χρονική στιγμή που οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_2 και Σ_3 γίνουν ίσες $\vec{V}_2' = \vec{V}_3 = \vec{v}_κ$. Αμέσως μετά η ταχύτητα της Σ_3 γίνεται μεγαλύτερη της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 και το ελατήριο αρχίζει να αυξάνει το μήκος του. Το σύστημα σφαίρα Σ_2 -ελατήριο-σφαίρα Σ_3 είναι μονωμένο, διότι $\vec{N}_2 = -\vec{W}_2$, $\vec{N}_3 = -\vec{W}_3$ και οι δυνάμεις μεταξύ του ελατηρίου και των σφαιρών Σ_2 και Σ_3 είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα, όταν αυτό αμέσως μετά την ελαστική κρούση των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 βρίσκεται στη θέση (I) **(Σχήμα β)** και όταν αυτό βρίσκεται στη θέση (II) που η συσπείρωση του ελατηρίου γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά **(Σχήμα δ)**.



$$\vec{P}_{O\Lambda(I)} = \vec{P}_{O\Lambda(II)} \Rightarrow m_2 v = m_2 v_{\kappa} + m_3 v_{\kappa} \quad m_3 = m_2 \Rightarrow v_{\kappa} = \frac{v}{2} = \frac{v}{100} \quad (5)$$

Όταν η συσπείρωση του ελατηρίου γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά, ο ήχος που εκπέμπει τότε η ηχητική πηγή προς τον παρατηρητή A θα φθάσει σ' αυτόν με μικρή χρονική καθυστέρηση ως ήχος συχνότητας f_2 , που προέρχεται από μία πηγή που απομακρύνεται από αυτόν με ταχύτητα v_{κ} , οπότε λόγω του φαινομένου Doppler:

$$f_2 = f_s \frac{v_{\eta\chi}}{v_{\eta\chi} + v_{\kappa}} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} f_2 = f_s \frac{v_{\eta\chi}}{v_{\eta\chi} + \frac{v_{\eta\chi}}{100}} \Rightarrow f_2 = f_s \frac{v_{\eta\chi}}{\frac{101}{100} v_{\eta\chi}} \Rightarrow f_2 = f_s \frac{100}{101} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} f_2 = f_1 \frac{100}{101} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{101}{100}$$

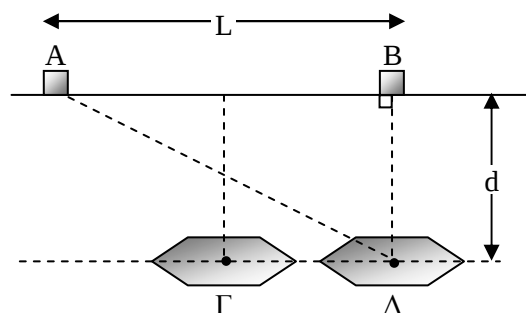
B1. γ

B2. Επειδή στη θέση Γ τα δύο ηλεκτρομαγνητικά (H/M) κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά:

$$(\Gamma A) - (\Gamma B) = 2N \frac{\lambda}{2} \stackrel{(\Gamma A) = (\Gamma B)}{\Rightarrow} N = 0.$$

Στη θέση Δ όπου ο ασύρματος του πλοίου δεν καταγράφει σήμα από τους δύο σταθμούς, τα δύο H/M κύματα συμβάλλουν αποσβεστικά για 2^η φορά (N=1) μετά την ενισχυτική συμβολή τους στη θέση Γ που αντιστοιχεί στην τιμή N=0. Άρα

$$(\Delta A) - (\Delta B) = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \stackrel{N=1}{\Rightarrow} (\Delta A) - (\Delta B) = \frac{3\lambda}{2} \quad (1)$$



Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\Delta$:

$$(A\Delta) = \sqrt{(AB)^2 + (B\Delta)^2} \Rightarrow (A\Delta) = \sqrt{L^2 + d^2} \Rightarrow (\Delta A) = 1200\text{m} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) \Rightarrow 1200 - 600 = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 400\text{m}.$$

Γ₁. α

Γ₂. Επειδή οι τροχοί του ποδηλάτου εκτελούν κύλιση χωρίς ολίσθηση για τα σημεία επαφής τους με τον δρόμο ισχύει: $v_{\gamma\pi} = v_{\text{cm}} = \omega R \Rightarrow v = \omega R \quad (1)$

Η συνολική κινητική ενέργεια του ποδηλάτου είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής μεταφορικής ενέργειας του σκελετού και του κάθε τροχού και της στροφικής κινητικής ενέργειας των τροχών .

$$\text{Άρα: } K = \frac{1}{2} Mv^2 + 2\left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mR^2\omega^2\right) \xrightarrow{(1)} \frac{2}{3} Mv^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + 2\left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mv^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} Mv^2 = 2mv^2 \Rightarrow m = \frac{M}{12}.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι όσα σημεία του μέσου δεν βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους έχουν ταχύτητες, άρα όσα βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους ($y=0$) είναι δεσμοί, επειδή στη θέση O ($x=0$) σχηματίζεται κοιλία, στη θέση Δ

σχηματίζεται ο πέμπτος μετά από αυτήν δεσμός ($N=4$): $x_{\Delta} = (2 \cdot 4 + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_{\Delta} = 9 \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$

$$(O\Delta) = 9 \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 1,35 = 9 \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 0,6\text{m} \quad (1).$$

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας μιας κοιλίας είναι:

$$|V_{\text{max}}| = \omega |A'_{\kappa}| \Rightarrow |V_{\text{max}}| = 2\pi f |A'_{\kappa}| \Rightarrow |V_{\text{max}}| = 10\pi |A'_{\kappa}| \Rightarrow |A'_{\kappa}| = 0,08\text{m}.$$

Αλλά το πλάτος $|A'_{\kappa}|$ μιας κοιλίας είναι $|A'_{\kappa}| = 2A$, όπου A = το πλάτος του κάθε τρέχοντος αρμονικού κύματος, άρα $A = 0,04\text{m}$.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι $y = 0,08\text{syn}\left(\frac{10\pi x}{3}\right)\eta\mu(10\pi t) \quad (\text{S.I}) \quad (2).$

Οι εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων είναι:

$$y_1 = 0,04\eta\mu 2\pi(5t - \frac{5x}{3}) \quad (\text{S.I}) \quad \text{και} \quad y_2 = 0,04\eta\mu 2\pi(5t + \frac{5x}{3}) \quad (\text{S.I})$$

B. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου B που βρίσκεται στη θέση $x_{\Delta} = 0,9\text{m}$, όπως προκύπτει από την (2) είναι $y_B = 0,08\text{syn}\left(\frac{7\pi}{3}\right)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow y_B = 0,04\eta\mu(10\pi t) \quad (\text{S.I}) \quad (3).$ Η ταχύτητα του σημείου B δίνεται από τη σχέση: $V_B = 0,4\pi\text{syn}(10\pi t) \quad (4).$

Αντίστοιχα η απομάκρυνση του σημείου O ($x_O = 0$) δίνεται από τη σχέση $y_O = 0,08\eta\mu(10\pi t) \quad (\text{S.I})$ και η ταχύτητά του $V_O = 0,8\pi\text{syn}(10\pi t) \quad (\text{S.I})$. Τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο δοθέν στιγμιότυπο η απομάκρυνση είναι $y_O = 4 \cdot 10^{-2}\text{m}$ και η ταχύτητα $V_O > 0$ με αντικατάσταση:

$$\eta\mu(10\pi t) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \text{syn}(10\pi t) = + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5).$$

Από (4) $\Rightarrow V_B = 0,2\pi\sqrt{3}\text{m/s}$. Οι ταχύτητες των σημείων O και B έχουν την ίδια φορά, διότι μεταξύ τους παρεμβάλλονται 2 δεσμοί.

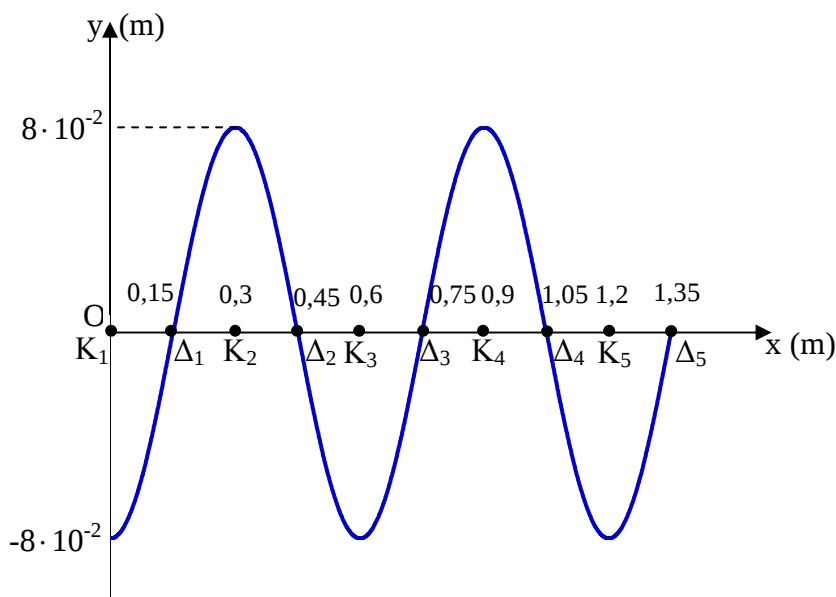
Γ. Το πλάτος ενός τέτοιου σημείου Σ το οποίο βρίσκεται στη θέση Σ και απέχει $\frac{\lambda}{6}$ από τον πλησιέστερο σ' αυτό δεσμό που βρίσκεται στη θέση $x_N = (2N + 1)\frac{\lambda}{4}$, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} |A'_\Sigma| = 0,08 \left| \sin\left(\frac{10\pi x_\Sigma}{3}\right) \right| &\Rightarrow |A'_\Sigma| = 0,08 \left| \sin\frac{10\pi}{3} \left(x_N \pm \frac{\lambda}{6}\right) \right| \Rightarrow \\ |A'_\Sigma| = 0,08 \left| \sin\frac{10\pi}{3} \left[(2N + 1)\frac{\lambda}{4} \pm \frac{\lambda}{6}\right] \right| &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} |A'_\Sigma| = 0,08 \left| \sin\left(N\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3}\right) \right| \Rightarrow \\ |A'_\Sigma| = 0,08 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 0,04\sqrt{3}\text{m} \quad (6) \end{aligned}$$

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σημείου Σ είναι:

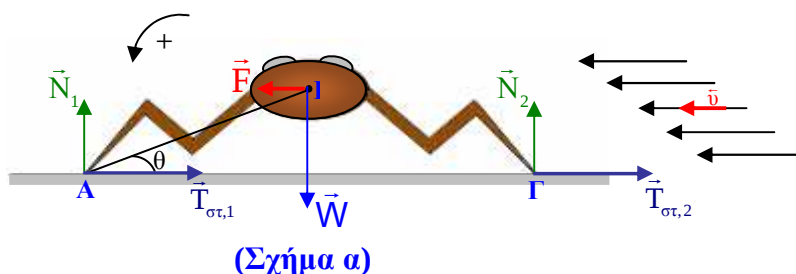
$$|V_{\Sigma \max}| = \omega |A'_\Sigma| \Rightarrow |V_{\Sigma \max}| = 2\pi f |A'_\Sigma| \stackrel{(6)}{\Rightarrow} |V_{\Sigma \max}| = 0,4\pi\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

Δ. Από τη (2) για $t=0,15\text{s}$ έχουμε $y = -0,08\sin\left(\frac{10\pi x}{3}\right)$ (S.I) με $0 \leq x \leq 1,35\text{m}$. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος για το τμήμα ΟΔ τη χρονική στιγμή $t_2=0,15\text{s}$ είναι η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης:



ΘΕΜΑ 4^ο

Α₁. Το έντομο ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{W}$, της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ του ανέμου, των κατακόρυφων δυνάμεων του εδάφους $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$ στα άκρα Α και Γ του εντόμου αντίστοιχα και των δυνάμεων στατικής τριβής $\vec{T}_{\sigma 1}$ και $\vec{T}_{\sigma 2}$, όπως φαίνονται στο **σχήμα α**.



Θεωρούμε ως θετικές τις ροπές που στρέφουν το έντομο αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του ανέμου για την οποία το έντομο δεν ανατρέπεται, αντιστοιχεί στην κατάσταση εκείνη, όπου η επαφή του άκρου του εντόμου Γ με το έδαφος μόλις χάνεται, άρα $\vec{N}_2=0$, $\vec{T}_{\sigma 2}=0$ και $\Sigma\tau_{(A)} \leq 0$ (1)

Από τη συνθήκη μη ανατροπής (1): $F(AK)\eta\mu\theta - W(AK)\sigma\upsilon\nu\theta \leq 0 \Rightarrow F\eta\mu\theta \leq mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$

$8 \cdot 10^{-4} \cdot \upsilon \cdot \eta\mu\theta \leq mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \upsilon \leq \frac{mg\sigma\upsilon\nu\theta}{8 \cdot 10^{-4} \eta\mu\theta}$ (2). Με αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (2) :

$8 \cdot 10^{-4} \cdot \upsilon \cdot 0,6 \leq 3 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 0,8 \Rightarrow \upsilon \leq 5 \Rightarrow \upsilon_{\max} = 5 \text{ m/s}$ (3)

A₂. Η σχέση (2) γράφεται: $\upsilon \leq \frac{mg}{8 \cdot 10^{-4} \varepsilon\phi\theta} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \frac{mg}{8 \cdot 10^{-4} \varepsilon\phi\theta}$ με $0 < \hat{\theta} < \frac{\pi}{2}$ rad. Από την

τελευταία σχέση προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η γωνία θ , αυξάνεται και η τιμή της $\varepsilon\phi\theta$, άρα μειώνεται η τιμή του μέτρου της μέγιστης ταχύτητας του ανέμου για την οποία το έντομο δεν ανατρέπεται. Συνεπώς διαφωνούμε με την άποψη, αφού η αύξηση της μέγιστης τιμής του μέτρου της ταχύτητας μη ανατροπής επιτυγχάνεται με ελάττωση της γωνίας θ .

Παρατήρηση 1^η

Για τις διάφορες στάσεις που μπορεί να πάρει το έντομο ως προς το έδαφος προκύπτει ότι όσο πιο χαμηλά βρίσκεται το κέντρο μάζας του K, δηλαδή όσο πιο μικρή είναι η γωνία θ που λόγω της στάσης του σχηματίζει με το έδαφος, αυξάνεται ο μοχλοβραχίονας (AK) $\sigma\upsilon\nu\theta$ του βάρους W και μειώνεται ο μοχλοβραχίονας (AK) $\eta\mu\theta$ της δύναμης F του ανέμου με αποτέλεσμα, η μεγαλύτερη τώρα ροπή του βάρους να μπορεί να εξουδετερώσει μεγαλύτερη ροπή της F, που θα μπορεί να προκύπτει από δύναμη F μεγαλύτερου μέτρου και μικρότερου μοχλοβραχίονα.

B₁. Το μέτρο της ταχύτητας του ανέμου γίνεται $\upsilon = 3\upsilon_{\max}^{(3)} \Rightarrow \upsilon = 15 \text{ m/s}$ (4).

Όταν το άκρο Γ του εντόμου βρεθεί στην κατακόρυφη που διέρχεται από το A, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση του εντόμου:

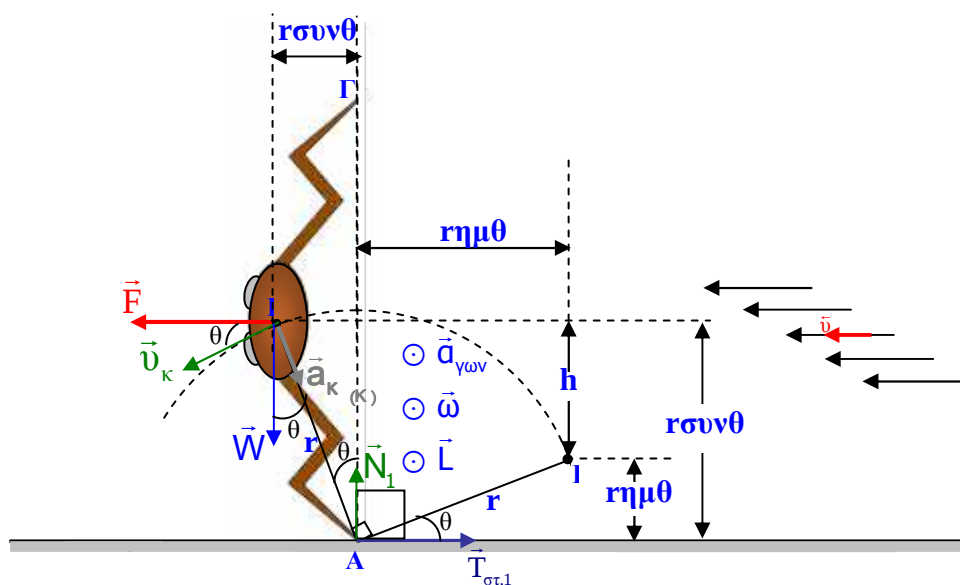
$$\Sigma \tau_{(A)} = I_{(A)} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F(KA) \sigma\upsilon\nu\theta + mg(KA) \eta\mu\theta = I_{(A)} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{F(KA) \sigma\upsilon\nu\theta + mg\eta\mu\theta}{I_{(A)}}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{8 \cdot 10^{-4} \cdot \upsilon (KA) \sigma\upsilon\nu\theta + mg\eta\mu\theta}{I_{(A)}} = 114 \text{ rad/s} \quad (5) \quad \text{Η κατεύθυνση της } \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \text{ είναι όπως φαίνεται}$$

στο **σχήμα β**.

Καθώς το έντομο περιστρέφεται, το κέντρο μάζας K του εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας (KA) και

ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του είναι $\frac{d\upsilon_K}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu} (KA) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \frac{d\upsilon_K}{dt} = 2,28 \text{ m/s}^2$ (6).



(Σχήμα β)

Η στροφορμή του εντόμου έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο **σχήμα β** και μέτρο $L = I_{(A)} \omega \Rightarrow L = 36 \cdot 10^{-6} \text{ Kg m}^2/\text{s}$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt}$ υπολογίζεται ως εξής:

1^{ος} τρόπος

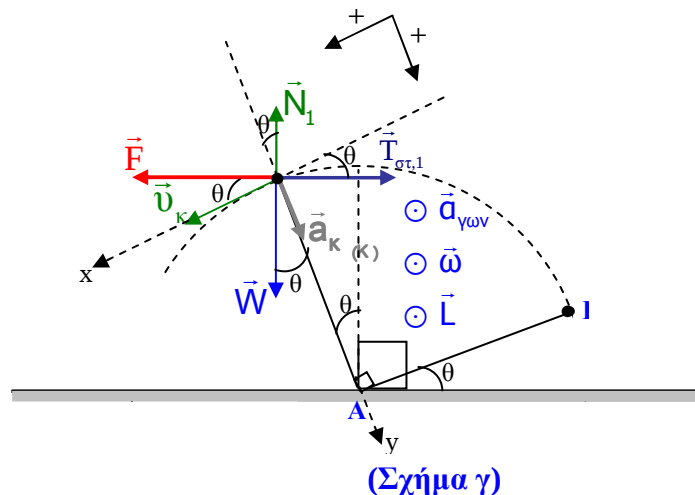
Η εφαρμογή του Θ.Ε.Ε για την περιστροφική κίνηση του εντόμου δίνει: $dK = dW_{\Sigma\tau} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = I_{(A)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \frac{dK}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 114 \cdot 18 = 4,104 \cdot 10^{-3} \text{ J/s}$$

2^{ος} τρόπος

$$\frac{dK}{dt} = \left(\frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2 \right)' = I_{(A)} \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I_{(A)} \cdot \omega \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4,104 \cdot 10^{-3} \text{ J/s}$$

B₂. Από τον ορισμό του κέντρου μάζας προκύπτει ότι ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα m του εντόμου που τοποθετείται στη θέση του κέντρου μάζας K και σ' αυτό ασκούνται οι ίδιες δυνάμεις θα κινηθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, δηλαδή θα διαγράψει κυκλική τροχιά κέντρου A και ακτίνας (KA) . Μεταφέρουμε όλες τις δυνάμεις στο K και έχουμε:



Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στη διεύθυνση Kx έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \frac{dv_K}{dt} \Rightarrow W_x + F_x - N_{1x} - T_{\sigma tx} = m a_{\gamma\omega\nu}(KA) \Rightarrow$$

$$mg\eta\mu\theta + F\sigma\upsilon\nu\theta - N_1\eta\mu\theta - T_{\sigma t}\sigma\upsilon\nu\theta = m a_{\gamma\omega\nu}r \Rightarrow 6N_1 + 8T_{\sigma t} = 0,107 \text{ N} \quad (7)$$

Αντίστοιχα ο θεμελιώδης της μηχανικής στη διεύθυνση Ky (διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς για τη συγκεκριμένη θέση):

$$\Sigma F_y = m a_{\kappa(K)} \Rightarrow W_y + T_{\sigma ty} - N_{1y} - F_y = m \omega^2(KA) \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\theta + T_{\sigma t}\eta\mu\theta - N_1\sigma\upsilon\nu\theta - F\eta\mu\theta = m \omega^2 r$$

$$\Rightarrow 6 T_{\sigma t} - 8 N_1 = 0,067 \text{ N} \quad (8)$$

Από (7) και (8): $N = 0,001 \text{ N}$ και $T_{\sigma t} = 0,0126 \text{ N}$.

Σχόλιο 1^ο

Η τιμή του μέτρου της ταχύτητας του ανέμου όταν το έντομο περιστρέφεται ($v = 15 \text{ m/s}$) μπορεί να δοθεί ως αριθμητικό δεδομένο, έτσι η επίλυση των ερωτημάτων **B₁** και **B₂** γίνεται ανεξάρτητη από την επίλυση του **A₁**. Στην περίπτωση αυτή ο εξεταζόμενος προιδεάζεται για την τιμή της ζητούμενης $v_{\max}$ ($v_{\max} < 15 \text{ m/s}$). Στην διατύπωση που εδώ επιλέχθηκε, η v προσδιορίζεται σε σχέση με την τιμή της $v_{\max}$ (είναι τριπλάσια), που σημαίνει ότι τυχόν λάθος στη λύση ή μη λύση του **A₁** επηρεάζει στην συνέχεια την λύση των **B₁** και **B₂**. Επομένως η διατύπωση που θα επιλεγθεί, είναι θέμα επιλογής του βαθμού δυσκολίας.

Γ.Εφαρμόζουμε το Θ.Ε.Ε για την περιστροφή του εντόμου από την αρχική του θέση και μέχρι τη θέση όπου το άκρο του Γ βρίσκεται στην κατακόρυφη που διέρχεται από το Α:

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow W_F + W_W = \frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2 \Rightarrow W_F - mgh = \frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2 \Rightarrow W_F - mg(r \sin \theta - r \eta \mu \theta) = \frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2 \Rightarrow$$

$$W_F = mgr(\sin \theta - \eta \mu \theta) + \frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2 \Rightarrow W_F = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2}(0,8 - 0,6) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 18^2 \Rightarrow$$

$$W_F = 336 \cdot 10^{-6} \text{ J. (9)}$$

Η κινητική ενέργεια του εντόμου ως (%) ποσοστό του έργου W_F για τη συγκεκριμένη περιστροφή

$$\text{είναι : } \pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2}{W_F} 100(\%) \stackrel{(9)}{\Rightarrow} \pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 18^2}{336 \cdot 10^{-6}} 100(\%) = 96,428(\%).$$

Παρατήρηση 2^η

Ο υπολογισμός του έργου W_F έγινε έμμεσα, δηλαδή με τη χρήση του Θ.Ε.Ε και με δεδομένη την τιμή της γωνιακής συχνότητας ω ($\omega = 18 \text{ rad/s}$). Ο άμεσος υπολογισμός του έργου της F είναι εφικτός και μάλιστα, χωρίς να δίνεται η τιμή της ω , αλλά εδώ δεν επιλέχθηκε ως τρόπος λύσης, αφού οι μαθητές στα πλαίσια του υπάρχοντος προγράμματος Λυκειακής φυσικής δεν διδάσκονται τον υπολογισμό του έργου δύναμης σταθερής κατεύθυνσης και μέτρου που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της σε καμπύλη τροχιά – στην περίπτωση που μελετάμε αυτό αφορά και το έργο της F και το έργο του βάρους W , όπου στην περίπτωση του βάρους (συντηρητική δύναμη) το έργο υπολογίζεται ως το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας – επίσης δεν διδάσκεται ο υπολογισμός έργου με τη χρήση ολοκληρώματος, στην αντίθετη περίπτωση ο άμεσος υπολογισμός του έργου της W_F θα μπορούσε να γίνει και με τους ακόλουθους δύο τρόπους:

1^{ος} τρόπος

Το έργο της δύναμης του ανέμου F είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F και της προβολής της τροχιάς που διαγράφει το σημείο εφαρμογής της πάνω στη διεύθυνση της (βλέπε **σχήμα β**):

$$W_F = F \cdot (r \cdot \sin \theta + r \cdot \eta \mu \theta) = F \cdot r(\sin \theta + \eta \mu \theta) = 8 \cdot 10^{-4} \cdot 15 \cdot 2 \cdot 10^{-2}(0,8 + 0,6) = 336 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

2^{ος} τρόπος

Αν θ είναι η εκάστοτε γωνία που σχηματίζει η ακτίνα περιστροφής $KA = r$ του κέντρου μάζας K του εντόμου με το έδαφος:

$$W_F = \int_{\frac{\pi}{2} + \text{τοξ}\sin 0,8}^{\frac{\pi}{2} + \text{τοξ}\sin 0,8} \tau_F d\theta \Rightarrow W_F = \int_{\text{τοξ}\sin 0,8}^{\frac{\pi}{2} + \text{τοξ}\sin 0,8} F \cdot r \eta \mu \theta d\theta \Rightarrow W_F = [-F \cdot r \sin \theta]_{\text{τοξ}\sin 0,8}^{\frac{\pi}{2} + \text{τοξ}\sin 0,8} \Rightarrow$$

$$W_F = -F \cdot r(-\eta \mu(\text{τοξ}\sin 0,8) - 0,8) \Rightarrow W_F = 8 \cdot 10^{-4} \cdot 15 \cdot 2 \cdot 10^{-2}(0,6 + 0,8) = 336 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

Σχόλιο 2^ο

Για όσους τυχόν ενδιαφέρονται για το ρεαλιστικό ή μη χαρακτήρα των δεδομένων:

Τα έντομα στη μεγάλη πλειοψηφία τους διαθέτουν έξι άκρα, όμως υπάρχει ένα είδος εντόμου (bug) που ενδημεί σε λίμνες ή πισίνες και ονομάζεται water beetle ή waterboatman (μήκος από 1,5 έως 4 ίντσες, δηλαδή 3,8 έως 10 cm) (**εικόνα 1**) καθώς μπορεί και να κολυμπάει, ή μια άλλη παραλλαγή του που ονομάζεται backswimmer (μήκος μισή ίντσα, δηλαδή 1,3 cm) επειδή κολυμπάει προς τα πίσω (**εικόνα 2**) στην πραγματικότητα διαθέτει και αυτό έξι άκρα, αλλά επειδή τα δύο από αυτά είναι εμφανώς μεγαλύτερα, ενώ τα άλλα που είναι μικρότερα συνήθως είναι συνεπτυγμένα στο σώμα, μοιάζει σαν να διαθέτει μόνο δύο άκρα. Οι τιμές της μάζας διακυμαίνονται από λίγα δέκατα του mgr έως δεκάδες gr για τα γιγαντιαία water beetles (=σκαθάρια του νερού) Είναι ιδιαίτερα ενοχλητικά για όσους επιλέγουν τις πισίνες. Θα μπορούσε να είναι αυτό λοιπόν που μας απασχόλησε στο 4^ο θέμα. Μια εξαίρεση που όπως πάντα παρουσιάζει ενδιαφέρον.



(εικόνα 1)



(εικόνα 2)

Ξ.Στεργιάδης