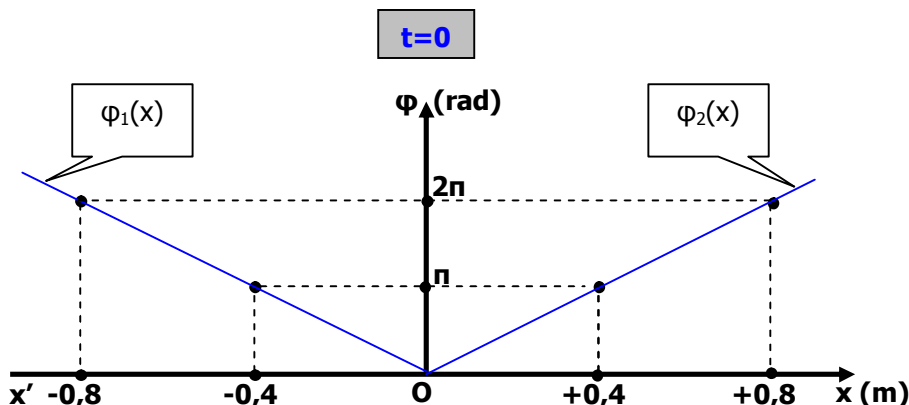


Φάσεις και «αντιφάσεις»

Ο άξονας $x'Ox$ αντιστοιχεί σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο κατά μήκος του οποίου διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις και ταχύτητα $v=8\text{m/s}$ δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$. Στο γράφημα απεικονίζονται οι φάσεις των δύο αρμονικών κυμάτων σε συνάρτηση με τη τετμημένη x των θέσεων των διαφόρων υλικών σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή $t=0$. Την ίδια χρονική στιγμή ($t=0$), το σημείο Σ που βρίσκεται στη θέση $x_\Sigma=0,7\text{m}$ έχει ταχύτητα $V_\Sigma=\pi\sqrt{2}\text{ m/s}$.



- α. Να γραφούν οι εξισώσεις των δύο αρμονικών κυμάτων.
- β. Να γραφεί η εξίσωση της διαταραχής που προκύπτει μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων.
- γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης της εγκάρσιας απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή $t_1=0,075\text{s}$ σε συνάρτηση με την τετμημένη x των θέσεων τους.
- δ. Να γραφούν οι εξισώσεις $y=f(x)$ που περιγράφουν την εικόνα του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή $t_1=0,075\text{s}$ και να γίνει η γραφική απεικόνιση του ελαστικού μέσου γι' αυτή τη χρονική στιγμή. Να θεωρήσετε ότι η εξίσωση μιας αρμονικής ταλάντωσης είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ με } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi.$$

Λύση

- α. Για το κύμα που διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά η εξίσωση της φάσης του είναι:

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + \varphi_{01} \quad (\text{S.I.}) \Rightarrow \varphi_1 = -2\pi\frac{x}{\lambda_1} + \varphi_{01} \quad \begin{cases} \text{για } x = 0 : \varphi_{01} = 0 \\ \text{για } x = -0,4\text{m} : \lambda_1 = 0,8\text{m} \end{cases}$$

Από τη Θεμελιώδη σχέση της κινηματικής $v = f_1\lambda_1 \Rightarrow f_1 = 10\text{Hz}$ και $T_1=0,1\text{s}$.

Με αντικατάσταση $\varphi_1 = 2\pi(10t - 1,25x)$ (S.I) **(1)**

Το πεδίο ορισμού της **(1)** αρχικά προκύπτει από τη συνθήκη $\varphi_1 \geq 0$ και είναι: $x \leq 8t$.

Αντίστοιχα για το κύμα που διαδίδεται από δεξιά προς τα αριστερά η εξίσωση της φάσης του είναι:

$$\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T_2} + \frac{x}{\lambda_2}\right) + \varphi_{02} \quad (\text{S.I.}) \Rightarrow \varphi_2 = 2\pi\frac{x}{\lambda_2} + \varphi_{02} \quad \begin{cases} \text{για } x = 0 : \varphi_{02} = 0 \\ \text{για } x = +0,4\text{m} : \lambda_2 = 0,8\text{m} \end{cases}$$

Από τη Θεμελιώδη σχέση της κινηματικής $v = f_2\lambda_2 \Rightarrow f_2 = 10\text{Hz}$ και $T_2=0,1\text{s}$.

Με αντικατάσταση $\varphi_2 = 2\pi(10t + 1,25x)$ (S.I) **(2)**

Το πεδίο ορισμού της **(2)** αρχικά προκύπτει από τη συνθήκη $\varphi_2 \geq 0$ και είναι: $x \geq -8t$

Πράγματι το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά τη χρονική στιγμή t έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x=vt=8t$, αυτό επιβάλλει η περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας που αποδίδεται από την **(1)**. Αντίστοιχα το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά τη χρονική στιγμή t έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x=-vt=-8t$, αυτό επιβάλλει η περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας που αποδίδεται από την **(2)**. Η ταυτόχρονη διάδοση των δύο κυμάτων στο ίδιο ελαστικό μέσο έχει ως αποτέλεσμα την επιβολή ενός περιορισμού σε σχέση με το πεδίο ορισμού των **(1)** και **(2)** που για την κάθε μια από αυτές επιβάλλεται από την ταυτόχρονη διάδοση του άλλου κύματος. Αν και οι εκφράσεις **(1)** και **(2)** διαμορφώθηκαν σύμφωνα με τις πληροφορίες που δίνει το γράφημα, δηλαδή ότι ως αρχή των χρόνων $t=0$ θεωρείται η χρονική στιγμή όπου τα κύματα έχουν διαδοθεί μέχρι τη θέση O που είναι

και η αρχή των θέσεων $x=0$, τα πεδία ορισμού τους τελικά καθορίζονται από την συναλήθευση των δύο φυσικών πραγματικοτήτων.

Μοιάζει αντιφατικό, αλλά το πεδίο ορισμού της **(1)** δεν καθορίζεται **τελικά** από το *μέχρι που έχει διαδοθεί* το κύμα στο οποίο αυτή αντιστοιχεί, αλλά από *που δεν έχει διαδοθεί* το κύμα στο οποίο αντιστοιχεί η **(2)** και αντιστρόφως. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή για τον καθορισμό των πεδίων ορισμού επιβάλλεται ένας περιορισμός που οφείλεται στην εξαίρεση της περιοχής $-8t \leq x \leq 8t$ (S.I) του ελαστικού μέσου στην οποία τα δύο κύματα έχουν συμβάλει μέχρι τη χρονική στιγμή t . Έτσι τα πεδία ορισμού των **(1)** και **(2)** **τελικά** είναι :

$$\varphi_1 = 2\pi(10t - 1,25x) \text{ (S.I) με } x \leq -8t \text{ και } \varphi_2 = 2\pi(10t + 1,25x) \text{ (S.I) με } x \geq 8t$$

Παρατήρηση

Η διαδικασία εύρεσης των εκφράσεων των φάσεων των δύο κυμάτων έγινε με αφετηρία τις σχέσεις

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + \varphi_{01} \text{ και } \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T_2} + \frac{x}{\lambda_2}\right) + \varphi_{02} \text{ οι οποίες θεωρήθηκαν ως γνωστές. Μπορεί}$$

όμως να αποδειχθούν εξ' αρχής με βάση το γράφημα που δίνεται :

$$\text{Η κλίση της } \varphi_1(x) \text{ είναι } \frac{\Delta\varphi_1(x)}{\Delta x} = \frac{\pi - 0}{-0,4 - 0} = -2,5\pi \text{ rad / m} \Rightarrow \frac{\varphi_1 - 0}{x - 0} = -2,5\pi \Rightarrow \varphi_1 = -2,5\pi x \text{ (S.I) με}$$

$x \leq 0$. Η τελευταία σχέση δίνει τη φάση ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση x του αρνητικού ημιάξονα Ox τη χρονική στιγμή $t=0$. Μετά από χρόνο Δt η φάση αυτού του σημείου θα είναι

$$\varphi_1 = -2,5\pi x + \omega\Delta t \Rightarrow \varphi_1 = -2,5\pi x + \omega(t - 0) \Rightarrow \varphi_1 = -2,5\pi x + \frac{2\pi}{T}t \Rightarrow \varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{5}{4}x\right) \text{ (1α)}$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων στις θέσεις $x=0$ και $x=-\lambda$ τη χρονική στιγμή t είναι

$$\Delta\varphi = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 2\pi\left[-\frac{5}{4}(-\lambda) - 0\right] = 2\pi \Rightarrow \lambda = 0,8\text{m}.$$

Από τη Θεμελιώδη σχέση της κινηματικής $v = f_1\lambda_1 \Rightarrow f_1 = 10\text{Hz}$ και $T_1=0,1\text{s}$. Με αντικατάσταση στην **(1α)** : $\varphi_1 = 2\pi(10t - 1,25x)$ (S.I).

$$\text{Αντίστοιχα η κλίση της } \varphi_2(x) \text{ είναι } \frac{\Delta\varphi_2(x)}{\Delta x} = \frac{\pi - 0}{0,4 - 0} = 2,5\pi \text{ rad / m} \Rightarrow \frac{\varphi_2 - 0}{x - 0} = 2,5\pi \Rightarrow \varphi_2 = 2,5\pi x \text{ (S.I)}$$

με $x \geq 0$. Η τελευταία σχέση δίνει τη φάση ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση x του θετικού ημιάξονα Ox τη χρονική στιγμή $t=0$. Μετά από χρόνο Δt η φάση αυτού του σημείου θα είναι

$$\varphi_2 = 2,5\pi x + \omega\Delta t \Rightarrow \varphi_2 = 2,5\pi x + \omega(t - 0) \Rightarrow \varphi_2 = 2,5\pi x + \frac{2\pi}{T}t \Rightarrow \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{5}{4}x\right) \text{ (2α)}$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων στις θέσεις $x=0$ και $x=\lambda$ τη χρονική στιγμή t είναι

$$\Delta\varphi = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 2\pi\left(\frac{5}{4}\lambda - 0\right) = 2\pi \Rightarrow \lambda = 0,8\text{m}.$$

Από τη Θεμελιώδη σχέση της κινηματικής $v = f_2\lambda_2 \Rightarrow f_2 = 10\text{Hz}$ και $T_2=0,1\text{s}$.

Με αντικατάσταση στην **(2α)**: $\varphi_2 = 2\pi(10t + 1,25x)$ (S.I)

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο Σ ταλαντώνεται με την επίδραση του κύματος $y_2(x,t)$ που διαδίδεται προς τα αριστερά.

$$\text{Επομένως } y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi(10t + 1,25x_\Sigma) \xrightarrow{x=0,7\text{m}} y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi(10t + 0,875) \text{ (S.I) με } t \leq \frac{x_\Sigma}{v} = 0,0875\text{s}.$$

Αντίστοιχα η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ είναι:

$$V_\Sigma = 20\pi A \sigma \nu 2\pi(10t + 0,875) \text{ (S.I)} \Rightarrow \pi\sqrt{2} = 20\pi A \sigma \nu \left(7\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow A = 0,1\text{m} \text{ (3)}.$$

Με βάση τις **(1)**, **(2)** και **(3)** οι εξισώσεις των δύο αρμονικών κυμάτων είναι:
 $y_1 = 0,1\eta\mu 2\pi(10t - 1,25x)$ (S.I) **(4)** με $x \leq -8t$ και $y_2 = 0,1\eta\mu 2\pi(10t + 1,25x)$ (S.I) **(5)** με $x \geq 8t$

β. Από τη συμβολή των δύο αρμονικών κυμάτων προκύπτει στάσιμο κύμα της μορφής:

$$y = 0,2 \sin \frac{2\pi x}{0,8} \eta \mu \frac{2\pi t}{0,1} = 0,2 \sin \frac{5\pi x}{2} \eta \mu 20\pi t \text{ (S.I.) } \quad (6) \text{ με } -8t \leq x \leq 8t.$$

γ. Τη χρονική στιγμή $t=0,075s$ τα δύο αρμονικά κύματα έχουν συμβάλλει στην περιοχή του μέσου για την οποία ισχύει: $-0,075 \cdot 8 \leq x \leq +0,075 \cdot 8 \Rightarrow -0,6m \leq x \leq +0,6m$.

Τη χρονική στιγμή $t=0,075s$ η εξίσωση του στάσιμου κύματος (6) έχει τη μορφή:

$$y = 0,2 \sin \frac{5\pi x}{2} \eta \mu \frac{3\pi}{2} \text{ (S.I.)}, \text{ με } -0,6m \leq x \leq +0,6m$$

Άρα η φάση της εγκάρσιας απομάκρυνσης ως συνάρτηση της τετμημένης της θέσης κάθε σημείου είναι:

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad αν } \sin \frac{5\pi x}{2} > 0 \text{ και } \varphi = \frac{5\pi}{2} \text{ rad αν } \sin \frac{5\pi x}{2} < 0, \text{ διότι}$$

$$y = -0,2 \left| \sin \frac{5\pi x}{2} \right| \eta \mu \frac{3\pi}{2} = 0,2 \left| \sin \frac{5\pi x}{2} \right| \eta \mu \left(\frac{3\pi}{2} + \pi \right) = 0,2 \left| \sin \frac{5\pi x}{2} \right| \eta \mu \left(\frac{5\pi}{2} \right).$$

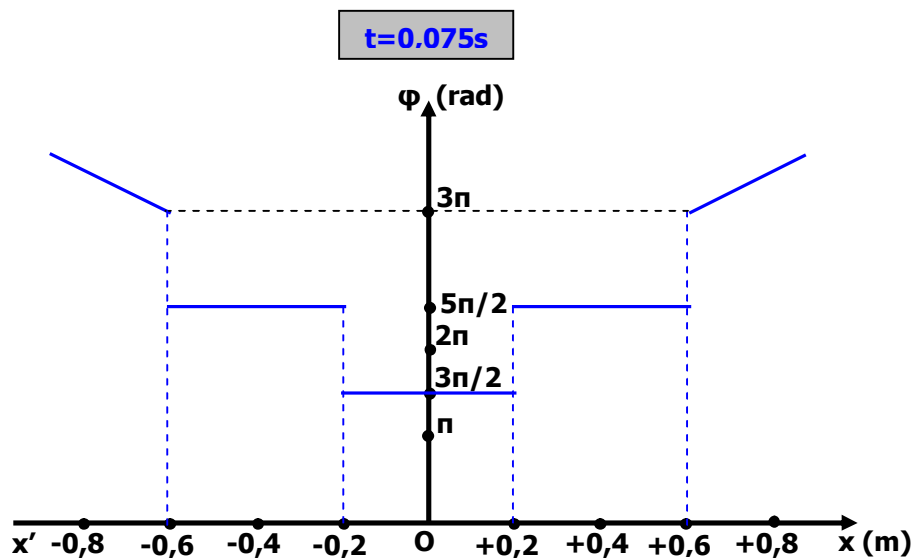
Αριστερά της θέσης $x=-0,6m$ τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται με την επίδραση του κύματος $y_1(x,t)$ και οι φάσεις των εγκάρσιων απομακρύνσεων τους δίνονται από τη σχέση (1):

$$\varphi_1 = 2\pi(10t - 1,25x) \text{ (S.I.) } \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3\pi}{2} - 2,5\pi x \text{ με } x \leq -0,6m.$$

Δεξιά της θέσης $x=+0,6m$ τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται με την επίδραση του κύματος $y_2(x,t)$ και οι φάσεις των εγκάρσιων απομακρύνσεων τους δίνονται από τη σχέση (2):

$$\varphi_2 = 2\pi(10t + 1,25x) \text{ (S.I.) } \Rightarrow \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} + 2,5\pi x \text{ με } x \geq +0,6m.$$

Το γράφημα της φάσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x της θέσης τους, τη χρονική στιγμή $t=0,075s$ είναι:

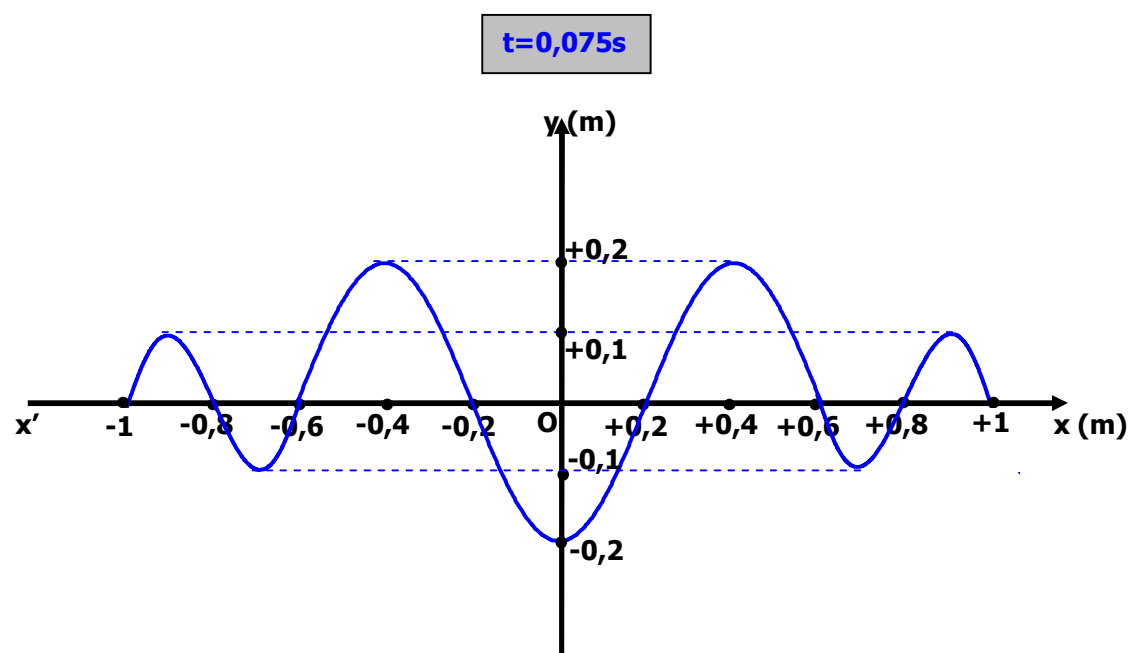


δ. Τη χρονική στιγμή $t=0,075s$ στάσιμο κύμα έχει σχηματιστεί στο τμήμα του ελαστικού μέσου που ορίζεται στην περιοχή $-v t_1 \leq x \leq +v t_1 \Rightarrow -0,6m \leq x \leq +0,6m$ και η εξίσωσή του έχει τη μορφή

$$y = -0,2 \sin \frac{5\pi x}{2} \text{ (S.I.) με } -0,6m \leq x \leq +0,6m.$$

Αριστερά της θέσης $x=-0,6m$ και δεξιά της θέσης $x=+0,6m$ τα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται υπό την επίδραση των τρεχόντων αρμονικών κυμάτων που περιγράφονται από τις εξισώσεις (4) και (5) αντίστοιχα και έχουν τις μορφές: $y_1 = 0,1 \eta \mu 2\pi(0,75 - 1,25x)$ (S.I) και

$y_2 = 0,1 \eta \mu 2\pi(0,75 + 1,25x)$ (S.I). Το στιγμιότυπο του μέσου φαίνεται στο επόμενο γράφημα:



Ξ. Στεργιάδης.