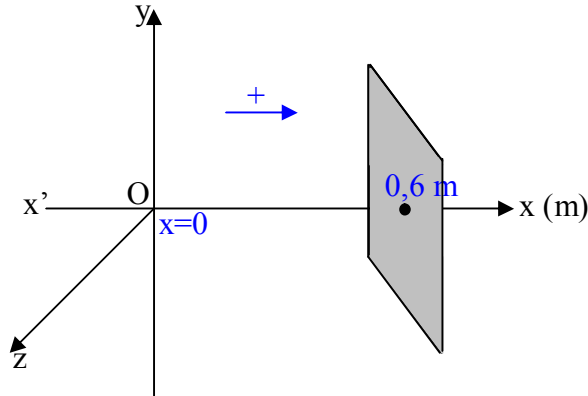


## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

### Άσκηση 1<sup>η</sup>

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $xOx'$  προσπίπτει σε τέλεια γυαλισμένη, αγωγίμη, μεταλλική επιφάνεια που έχει τοποθετηθεί κάθετα στην διεύθυνση του Ηλεκτρομαγνητικού κύματος και ανακλάται πλήρως. Η ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχει μέτρο που δίνεται από τη σχέση  $E_1 = 2 \cdot 10^{-3} \eta\mu 2\pi(3 \cdot 10^9 t - 10x)$  (S.I). Το μέτρο της έντασης του Ηλεκτρικού πεδίου του ανακλώμενου κύματος δίνεται από τη σχέση  $E_2 = -2 \cdot 10 \eta\mu 2\pi(3 \cdot 10^9 t + 10x)$  (S.I). Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .



**α.** Να εφαρμόσετε την Αρχή της Επαλληλίας και να αποδείξετε ότι η συμβολή προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος δημιουργεί στάσιμο ηλεκτρικό κύμα.

**β.** Με αφετηρία την εξίσωση του στάσιμου ηλεκτρικού κύματος, να προσδιορίσετε στον άξονα  $xOx'$  τις θέσεις όπου η ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, δηλαδή αντιστοιχούν σε δεσμούς του στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος καθώς και τις θέσεις όπου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μέγιστη, δηλαδή αντιστοιχούν σε κοιλίες του στάσιμου ηλεκτρικού κύματος.

**γ.** Θεωρούμε ως θέση με  $x=0$  την αρχή του άξονα  $O$ , θέση σχηματισμού ενός δεσμού του στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Αν η μεταλλική επιφάνεια βρίσκεται στη θέση  $x=0,6\text{m}$ , να υπολογιστεί το πλήθος των δεσμών και κοιλιών που σχηματίζονται από τη θέση  $x=0$  μέχρι την ανακλαστική επιφάνεια.

**δ.** Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου ηλεκτρικού κύματος τη χρονική στιγμή  $t = 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$  για το τμήμα  $0 \leq x \leq 0,6\text{m}$  του άξονα  $xOx'$ .

**ε.** Να υπολογίσετε τη στιγμιαία τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση  $A(x_A=0,275\text{m})$ , τη χρονική στιγμή που η ένταση στη θέση  $B(x_B=0,425\text{m})$  είναι

$$E_B = -4\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

**στ.** Να προσδιορίσετε τη σχέση που καθορίζει τις τιμές συχνότητας του Ηλεκτρομαγνητικού κύματος, για τις οποίες σχηματίζονται στάσιμα ηλεκτρικά κύματα στον άξονα  $xOx'$ , με δεδομένο ότι στη θέση  $x=0$  και στη θέση  $x=0,6\text{m}$  που βρίσκεται η μεταλλική επιφάνεια, σχηματίζονται δεσμοί. Πόσες τιμές συχνοτήτων υπάρχουν στην περιοχή των Μικροκυμάτων με  $2,4 \cdot 10^9 \text{ Hz} \leq f \leq 2,6 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ .

### ΛΥΣΗ

**α.** Από τη δοθείσα εξίσωση του ηλεκτρικού κύματος προκύπτουν οι τιμές:  $f = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$  και  $\lambda = 0,1\text{m}$ .

Από την Αρχή της Επαλληλίας έχουμε:

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow E = 2 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi(3 \cdot 10^9 t - 10x) - 2 \cdot 10^{-3} \eta \mu 2\pi(3 \cdot 10^9 t + 10x) \Rightarrow$$

$$E = 2 \cdot 10^{-3} [\eta \mu 2\pi(3 \cdot 10^9 t - 10x) + \eta \mu [2\pi(3 \cdot 10^9 t + 10x) + \pi]] \Rightarrow$$

$$E = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu [2\pi(3 \cdot 10^9 t) + \frac{\pi}{2}] \sigma \nu \nu [2\pi(-10x) - \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$E = 4 \cdot 10^{-3} \sigma \nu \nu (6\pi 10^9 t) \eta \mu 20\pi x \Rightarrow E = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 20\pi x \cdot \sigma \nu \nu 6\pi 10^9 t \quad (\text{S.I}) \quad (1)$$

Η σχέση (1) είναι εξίσωση στάσιμου ηλεκτρικού κύματος καθ' όσον η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα διάφορα σημεία του άξονα  $xx'$  ταλαντώνεται αρμονικά με πλάτος ταλάντωσης που εξαρτάται από τη θέση του κάθε σημείου στον άξονα  $xx'$ .

**β.** Η ένταση του στάσιμου ηλεκτρικού κύματος μηδενίζεται και δημιουργούνται «δεσμοί»

$$\text{όταν: } |E| = 0 \Rightarrow \left| 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 20\pi x \right| = 0 \Rightarrow |\eta \mu 20\pi x| = 0 \Rightarrow 20\pi x_{\Delta} = \kappa\pi \Rightarrow$$

$$x_{\Delta} = \frac{\kappa}{20} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Αντίστοιχα η ένταση του στάσιμου ηλεκτρικού κύματος γίνεται μέγιστη και δημιουργούνται

$$\text{«κοιλίες» όταν: } |E| = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}} \Rightarrow \left| 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 20\pi x \right| = 4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow |\eta \mu 20\pi x| = 1 \Rightarrow$$

$$20\pi x_{\kappa} = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{\kappa} = \frac{\kappa}{20} + \frac{1}{40} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

**γ.** Πρέπει:  $0 \leq x_{\Delta} \leq 0,6\text{m} \Rightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{20} \leq 0,6 \Rightarrow 0 \leq \kappa \leq 12 \Rightarrow \kappa = 0, 1, 2, \dots, 12$ . Άρα

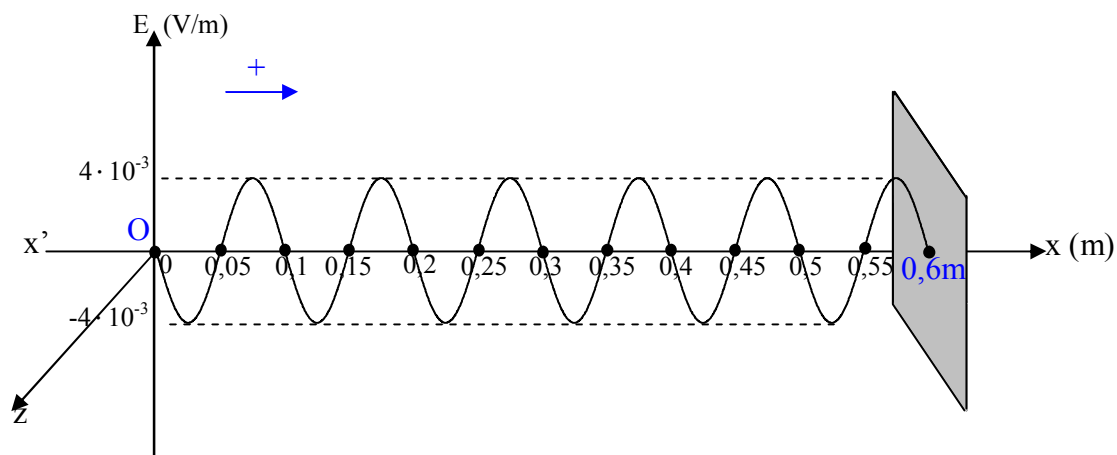
σχηματίζονται 13 δεσμοί.

Πρέπει:  $0 \leq x_{\kappa} \leq 0,6\text{m} \Rightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{20} + \frac{1}{40} \leq 0,6 \Rightarrow -0,025 \leq \frac{\kappa}{20} \leq 0,5975 \Rightarrow$

$0,5 \leq \kappa \leq 11,95 \Rightarrow \kappa = 0, 1, 2, 3, \dots, 11$ . Άρα σχηματίζονται 12 κοιλίες.

**δ.** Από την (1), τη χρονική στιγμή  $t = 5 \cdot 10^{-10} \text{s} (= \frac{3T}{2})$  προκύπτει:

$E = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 20\pi x \cdot \sigma \nu \nu 3\pi \Rightarrow E = -4 \cdot 10^{-3} \eta \mu 20\pi x \quad (\text{S.I})$ . Το στιγμιότυπο του Στάσιμου Ηλεκτρικού κύματος είναι:



**ε.** Από την εξίσωση (1) στη θέση B ( $x_B = 0,425\text{m}$ ), όταν η ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E_B = -4\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}, \text{ προκύπτει: } -4\sqrt{2} \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-3} \eta \mu (20\pi \cdot 0,425) \sigma \nu \nu (6\pi \cdot 10^9 t) \Rightarrow$$

συν(6π · 10<sup>-9</sup> t) = -√2 (4). Την ίδια χρονική στιγμή στη θέση Α(x<sub>A</sub>=0,275m) η ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου είναι : E<sub>A</sub>=4 · 10<sup>-3</sup> ημ(20π · 0,275) συν(6π · 10<sup>-9</sup> t) ⇒

$$E_A = 4 \cdot 10^{-3} \eta\mu(5,5\pi) \text{ συν}(6\pi \cdot 10^{-9} t) \Rightarrow E_A = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \frac{V}{m}$$

**στ.** Επειδή στη θέση Ο (x=0) και στη θέση που βρίσκεται η μεταλλική επιφάνεια (x=0,6m)

$$\text{σχηματίζονται δεσμοί, ισχύει : } 0,6 = \kappa \frac{\lambda}{2} \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ Άρα } 0,6 = \kappa \frac{c}{2f} \Rightarrow f = \kappa \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0,6}$$

$$\Rightarrow f = 2,5 \cdot 10^8 \kappa \text{ (5) με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ Αλλά } 2,4 \cdot 10^9 \text{ Hz} \leq f \leq 2,6 \cdot 10^9 \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$2,4 \cdot 10^9 \text{ Hz} \leq 2,5 \cdot 10^8 \kappa \leq 2,6 \cdot 10^9 \text{ Hz} \Rightarrow 9,6 \leq \kappa \leq 10,4 \Rightarrow \kappa = 10.$$

Από την (5): f=2,5 · 10<sup>9</sup> Hz

## Άσκηση 2<sup>η</sup>

Σε φούρνο Μικροκυμάτων οι δέσμες των Μικροκυμάτων ανακλώνται στα τοιχώματα του φούρνου με αποτέλεσμα να σχηματίζονται Στάσιμα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Στη μία διάσταση (πλάτος) του θαλάμου του φούρνου που έχει μήκος d=36cm αντιστοιχίζουμε τον άξονα x'x. Κατά μήκος του άξονα xx' θεωρούμε ότι διαδίδεται στάσιμο Ηλεκτρικό κύμα της μορφής

$$E = 2 \cdot 10^{-3} \eta\mu \frac{25\pi x}{3} \text{ συν}(5\pi \cdot 10^9 t) \text{ (S.I.)}$$

Θεωρούμε ως θέση x=0 τη θέση του ενός πλευρικού τοιχώματος του θαλάμου. Δίνεται η ταχύτητα του φωτός c=3 · 10<sup>8</sup>m/s.

**α.** Να προσδιορίσετε το πλήθος και τις θέσεις των σημείων όπου η ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου είναι:

**α<sub>1</sub>.** μηδέν **α<sub>2</sub>.** μέγιστη και βρίσκονται στο τμήμα του άξονα xx' με 0 ≤ x ≤ d=36cm.

**β.** Σε μια παρτίδα του συγκεκριμένου τύπου Φούρνου Μικροκυμάτων λόγω ενός κατασκευαστικού λάθους το πλάτος της βάσης του θαλάμου (panel) είναι d<sub>1</sub>=40cm. Ποιο το (%) ποσοστό της μεταβολής της συχνότητας των Μικροκυμάτων, ώστε στο τμήμα με 0 ≤ x ≤ d<sub>1</sub>, να σχηματίζεται ο ίδιος αριθμός σημείων μηδενικής έντασης Ηλεκτρικού πεδίου;

**γ.** Γιατί στους Φούρνους Μικροκυμάτων τα τρόφιμα τοποθετούνται σε περιστρεφόμενο δίσκο;

**δ.** Προκειμένου να μετρήσουμε την ταχύτητα του φωτός σε Φούρνο Μικροκυμάτων συχνότητας f=2,45Hz, εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα:

Καλύπτουμε τη μια επιφάνεια ενός χαρτονιού με διαστάσεις κατάλληλες, ώστε να μπορεί να τοποθετηθεί στο θάλαμο του φούρνου, με φύλλα θερμικού χαρτιού και στερεώνουμε τις άκρες τους στην άλλη επιφάνεια του χαρτονιού. Ψεκάζουμε ομοιόμορφα την επιφάνεια του θερμικού χαρτιού με νερό και αφού αφαιρέσουμε τον περιστρεφόμενο δίσκο του φούρνου, τοποθετούμε το χαρτόνι στο θάλαμο. Θέτουμε σε λειτουργία το φούρνο για ένα λεπτό. Όταν βγάλουμε το χαρτόνι, παρατηρούμε ότι υπάρχουν περιοχές έντονης προβολής (αμαύρωσης) στο θερμικό χαρτί. Επαναλαμβάνουμε τρεις φορές την όλη διαδικασία και βρίσκουμε ότι η μέση απόσταση των κέντρων δύο περιοχών έντονης αμαύρωσης είναι d=6cm. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των Μικροκυμάτων. Αν η τιμή της ταχύτητας διάδοσης του φωτός είναι c<sub>0</sub>=299.792.458m/s, ποιο το (%) σχετικό σφάλμα της μέτρησης;

## ΛΥΣΗ

**α.** Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος προκύπτουν οι τιμές: f = 2,5 · 10<sup>9</sup>Hz (1)

και λ=0,24 m (2).

**α<sub>1</sub>.** Στα σημεία στα οποία η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, ισχύει:

$$E=0 \Rightarrow 2 \cdot 10^{-3} \left| \eta\mu \frac{25\pi x}{3} \right| = 0 \Rightarrow \left| \eta\mu \frac{25\pi x}{3} \right| = 0 \Rightarrow \frac{25\pi x}{3} = \kappa\pi \Rightarrow x_{\Delta} = \frac{3\kappa}{25} \quad \kappa=0, 1, 2, \dots$$

Αλλά  $0 \leq x_{\Delta} \leq 0,36 \Rightarrow 0 \leq \frac{3\kappa}{25} \leq 0,36 \Rightarrow 0 \leq \kappa \leq 3 \Rightarrow \kappa = 0,1,2,3$ . Άρα υπάρχουν 4 δεσμοί,

στις θέσεις:  $x_{\Delta_1} = 0$ ,  $x_{\Delta_2} = 0,12\text{m}$ ,  $x_{\Delta_3} = 0,24\text{m}$ ,  $x_{\Delta_4} = 0,36\text{m}$ .

**α<sub>2</sub>**. Στα σημεία στα οποία η ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου είναι μέγιστη (κοιλίες) ισχύει

$$E = 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 2 \cdot 10^{-3} \left| \eta\mu \frac{25\pi x}{3} \right| = 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \left| \eta\mu \frac{25\pi x}{3} \right| = 1 \Rightarrow \frac{25\pi x_{\kappa}}{3} = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\kappa} = \frac{3\kappa}{25} + \frac{3}{50} \quad \kappa=0,1,2 \dots$$

Αλλά  $0 \leq x_{\kappa} \leq 0,36 \Rightarrow \frac{3\kappa}{25} + \frac{3}{50} \leq 0,36 \Rightarrow -0,5 \leq \kappa \leq 2,5 \Rightarrow \kappa = 0,1,2$

Άρα υπάρχουν 3 κοιλίες στις θέσεις:  $x_{\kappa 1}=0,06\text{m}$ ,  $x_{\kappa 2}=0,18\text{m}$ ,  $x_{\kappa 3}=0,30\text{m}$

**β**. Εάν  $f'$  και  $\lambda'$  οι νέες τιμές συχνότητας και πλάτους, για να σχηματίζεται ο ίδιος αριθμός δεσμών (4) στο τμήμα  $0 \leq x \leq d_1$  θα πρέπει :

$$d_1 = (4-1) \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{3}{2} \frac{c}{f'} \Rightarrow f' = \frac{3c}{2d_1} \Rightarrow f' = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^8}{0,80} = 1,125 \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad (3)$$

Το % ποσοστό της μεταβολής της συχνότητας είναι:  $\pi(\%) = \left( \frac{f' - f}{f} \right) \cdot 100\% \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \stackrel{(3)}{}$

$$\Rightarrow \pi(\%) = \frac{(1,125 - 2,5) \cdot 10^9}{2,5 \cdot 10^9} 100\% \Rightarrow \pi(\%) = \left( \frac{-1,375}{2,5} \right) 100\% = -55\%$$

**γ**. Επειδή στο εσωτερικό του θαλάμου σχηματίζονται δεσμοί, δηλαδή σημεία στα οποία η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, τα τρόφιμα περιστρέφονται, ώστε τα σημεία που βρίσκονται σε δεσμούς και δεν ακτινοβολούνται, να μετακινούνται σε θέσεις όπου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι μηδέν, άρα να εξασφαλίζεται η ομοιόμορφη ακτινοβολήση των τροφίμων με αποτέλεσμα την ομοιόμορφη θέρμανση των τροφίμων.

**δ**. Η μέση απόσταση που μετρήθηκε μεταξύ δύο σημείων μέγιστης αμαύρωσης του θερμικού χαρτιού, αντιστοιχεί στην απόσταση μεταξύ θέσεων όπου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

είναι μέγιστη (κοιλιών), άρα  $d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 12\text{cm} = 0,12\text{m}$ . Από τη θεμελιώδη σχέση της

κυματικής  $c = \lambda f \Rightarrow c = 12 \cdot 10^{-2} \cdot 2,45 \cdot 10^9 \Rightarrow c = 294.000.000 \text{ m/s}$

Το (%) σχετικό σφάλμα της μέτρησης είναι:

$$\sigma(\%) = \frac{c_0 - c}{c_0} \cdot 100\% \Rightarrow \sigma(\%) = \left( \frac{299.792.458 - 294.000.000}{299.792.458} \right) 100\% \Rightarrow \sigma(\%) = 1,932\%$$

**Ξ. ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ**