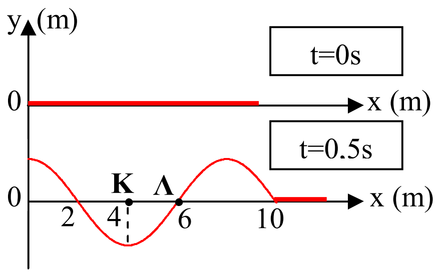
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

1η Ερώτηση

A_1. Στα διαγράμματα του σχήματος απεικονίζονται τα στιγμιότυπα ενός αρμονικού κύματος, που διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος ελαστικού μέσου που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα Ox, τις χρονικές στιγμές t=0 και t=0,5 s. Τη χρονική στιγμή t=0,5s που το σημείο Κ (x_K= 4m) έχει διανύσει μήκος τροχιάς s=0,6 m, το σημείο Λ (x_Λ= 6m) έχει ταχύτητα:

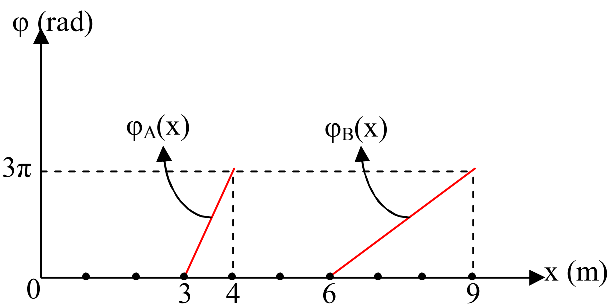


α. $V = -\pi\ m/s$ **β.** $V = \pi\ m/s$ **γ.** $V = 2\pi\ m/s$ **δ.** $V = -2\pi\ m/s$

A_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2η Ερώτηση

B_1. Δύο αρμονικά κύματα της μορφής $y=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$, διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα σε δύο διαφορετικές χορδές ,που ταυτίζονται σε κάθε περίπτωση με τον άξονα Ox, κατά την αρνητική φορά του άξονα και φθάνουν τη χρονική στιγμή t=0 στη θέση O(x=0), η οποία ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$. Στο διάγραμμα του σχήματος απεικονίζονται οι φάσεις φ_A και φ_B των δύο κυμάτων σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x σε κοινούς άξονες ,για την ίδια χρονική στιγμή. Για τις συχνότητες f_A και f_B των δύο κυμάτων ισχύει:



α. $f_A=f_B$ **β.** $f_A=3f_B$ **γ.** $f_A=\frac{1}{3}f_B$

B_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3η Ερώτηση

Γ_1. Κατά μήκος ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου που εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα Ox, διαδίδεται κάθε φορά κατά τη θετική φορά και με την ίδια ταχύτητα διάδοσης ,ένα από τα τρία αρμονικά κύματα με εξισώσεις: $y_1=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$, $y_2=A\eta\mu 4\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$, $y_3=2A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$.Για τις τιμές των ισχύων που μεταφέρει το κάθε κύμα P_1, P_2 και P_3 αντίστοιχα ισχύει :

α. $P_1=\frac{P_2}{4}=\frac{P_3}{4}$ **β.** $P_1= P_2= P_3$ **γ.** $P_1= P_2=4P_3$

Γ_2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

4η Ερώτηση

Δ_1. Ένας φάρος αναλαμπών φωτοβολεί «στιγμιαία» κάθε 10,5s.Κάποια χρονική στιγμή που ο φάρος φωτοβολεί, ο φαροφύλακας που στέκεται στην ίδια κατακόρυφη με την εστία φωτισμού, παρατηρεί ότι από μπροστά του διέρχεται το ΄΄όρος΄΄ ενός κύματος που θεωρείται εγκάρσιο αρμονικό και σταθερού πλάτους, ενώ μια σημαδούρα που βρίσκεται στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και σε οριζόντια απόσταση d από το φαροφύλακα, βρίσκεται σε ΄΄κοιλάδα΄΄ του κύματος. Ο φαροφύλακας επίσης παρατήρησε ότι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων ΄΄όρους΄΄ από μπροστά του είναι 2s. Το κύμα διανύει την απόσταση d σε χρόνο που αντιστοιχεί σε τρεις διαδοχικές αναλαμπές του φάρου. Κατά μήκος της απόστασης d σχηματίζονται :

α.10´´όρη´´ **β.** 11 ´´όρη´´ **γ.** 12 ´´όρη´´

Δ2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

5η Ερώτηση

Ε1.Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με μήκος κύματος λ=0,2 m διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση σε ελαστικό μέσο x'Ox. Το κύμα τη χρονική στιγμή t=0, βρίσκεται στη θέση O (x=0) η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση y=Αημωt. Δύο σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου που απέχουν d=$3\frac{\lambda}{2}$ βρίσκονται στη μέγιστη δυνατή απόσταση, η οποία είναι ℓ_{max}=0,5m, κάθε 0,1s. Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου είναι:

α. 3π m / s **β.** π m / s **γ.** 2π m / s

Ε2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

6η Ερώτηση

ΣΤ1. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά σε ελαστικό μέσο x'Ox. Το κύμα τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση O (x=0), η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση y=Αημωt. Τη χρονική στιγμή t_1=2s το κύμα φτάνει σε σημείο Α του ελαστικού μέσου, ενώ τη χρονική στιγμή t_2=4s που το κύμα φθάνει σε σημείο Β που βρίσκεται δεξιότερα του Α, το σημείο O έχει φάση $\varphi_{(O)}$=8 π rad. Αν τα σημεία Α και Β απέχουν d=6m, τότε τη χρονική στιγμή t_2 τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ τους και έχουν απομάκρυνση y=+$\frac{A}{2}$ είναι:

α. 4 **β.** 2 **γ.** 3

ΣΤ2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. α

Α2.Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t=0,5 s προκύπτει ότι: $x_K - x_\Lambda = \frac{\lambda}{4}$

$\Rightarrow \lambda=4(6-4) \Rightarrow \lambda=8m$ (1).

Ο χρόνος ταλάντωσης του σημείου Κ είναι $t = \frac{3T}{4}$, συνεπώς το μήκος της τροχιάς ταλάντωσης του Κ είναι s= 3A $\Rightarrow$0,6=3A $\Rightarrow$A=0,2m (2)

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon=\frac{x}{t} \Rightarrow \upsilon=\frac{10}{0,5} \Rightarrow \upsilon=20$ m/s (3)

Από τη θεμελιώδη σχέση της κυματικής: $\upsilon=\lambda\cdot f \Rightarrow f=\frac{\upsilon}{\lambda} \underset{(3)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} f=2,5$ Hz (4)

Ο χρόνος ταλάντωσης του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t=0,5s=$\frac{5T}{4}$ είναι $\Delta t=\frac{2T}{4}=\frac{T}{2}$ και η ταχύτητα του σημείου Λ είναι $V=-V_{max}$, διότι όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο του κύματος , τα σημεία αρχίζουν να ταλαντώνονται προς τη θετική κατεύθυνση.

Άρα $V=-\omega A \Rightarrow V=-2\pi f A \underset{(4)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} V= -\pi$ m/s.

*Η συχνότητα f μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής: t=0,5s$\Rightarrow \frac{5T}{4}$=0,5s$\Rightarrow$T=0,4s$\Rightarrow$f=2,5 Hz

Β1. β

Β2. Από την εξίσωση του πρώτου κύματος προκύπτει ότι η φάση δίνεται από τη σχέση

$\varphi_A=2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda_A})$. Άρα τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή (t=σταθ):

$$\frac{d\varphi_A}{dx}=\frac{2\pi}{\lambda_A}\Rightarrow\frac{0-3\pi}{3-4}=\frac{2\pi}{\lambda_A}\Rightarrow 3\pi=\frac{2\pi}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=\frac{2}{3}\,\text{m}\ (1)$$

Από την εξίσωση του δεύτερου κύματος αντίστοιχα προκύπτει ότι:

$\varphi_B=2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda_B})$. Άρα τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή (t=σταθ):

$$\frac{d\varphi_B}{dx}=\frac{2\pi}{\lambda_B}\Rightarrow\frac{0-3\pi}{6-9}=\frac{2\pi}{\lambda_B}\Rightarrow\pi=\frac{2\pi}{\lambda_B}\Rightarrow\lambda_B=2\ \text{m}\ (2)$$

Τα δύο κύματα έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης υ: $\upsilon=\lambda_A\ f_A=\lambda_B\ f_B\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} f_A=3\,f_B$

Γ1. α

Γ2. Από τη σύγκριση των εξισώσεων των τριών κυμάτων προκύπτει ότι:

$y_1=A\eta\mu\,2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$, με $f_1=f$ (1), $A_1=A$ (2)

$y_2=A\eta\mu 4\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})\Rightarrow y_2=A\eta\mu 2\pi\,(\frac{2t}{T}-\frac{2x}{\lambda})$, με $f_2=2f_1=2f$ (3) ,$A_2=A$ (4)

$y_3=2A\eta\mu 2\pi\,(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$, με $f_3=f$ (5), $A_3=2A$ (6)

Η ισχύς που μεταφέρει ένα κύμα , ορίζεται ως το πηλίκο της ενέργειας Ε που έχει μεταφέρει στο μέσο διάδοσης του σε χρόνο t προς το χρόνο t : $P=\frac{E}{t}$. Όμως η ενέργεια Ε είναι ίση με την ενέργεια ταλάντωσης των στοιχειωδών ταλαντωτών που αποτελούν το τμήμα του μέσου στο οποίο έχει διαδοθεί το κύμα σε χρόνο t.

$$E=E_1+E_2+\ldots+E_N\Rightarrow E=\frac{1}{2}m_1\omega^2A^2+\frac{1}{2}m_2\omega^2A^2\ldots+\frac{1}{2}m_N\omega^2A^2\Rightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}(m_1+m_2+\ldots+m_N)\omega^2A^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}(\Delta m)\omega^2A^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}(\Delta m)4\pi^2f^2A^2.$$ Όπου

Δm=η μάζα του τμήματος του μέσου στο οποίο έχει διαδοθεί το κύμα σε χρόνο t. Επειδή η ταχύτητα διάδοσης των τριών κυμάτων είναι ίδια , στον ίδιο χρόνο t διαδίδονται στην ίδια απόσταση στο μέσο, άρα η μάζα Δm του τμήματος του μέσου που ταλαντώνεται είναι ίδια.

Η ισχύς ενός κύματος είναι : $P=\frac{E}{t}\Rightarrow P=\frac{\frac{1}{2}(\Delta m)4\pi^2f^2A^2}{t}$ (7)

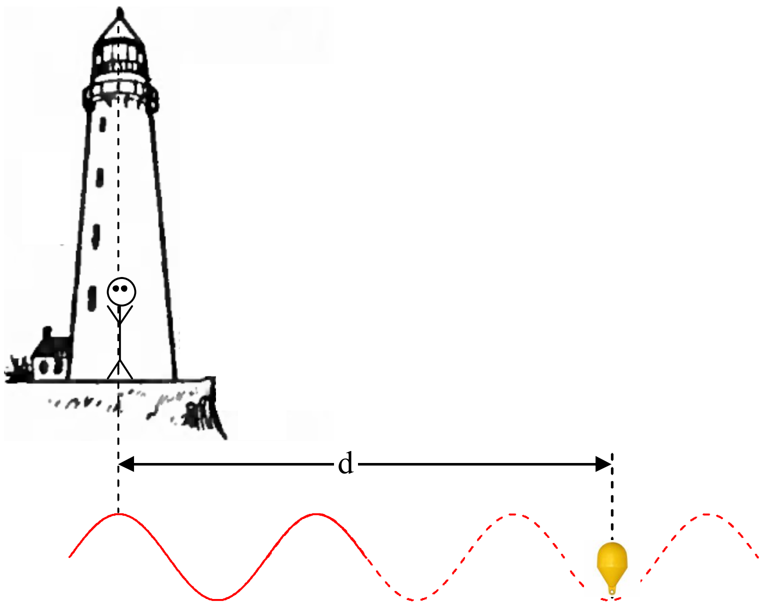
Από (7) $\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} P_1=\frac{\frac{1}{2}(\Delta m)4\pi^2f^2A^2}{t}$ (8)

Από (7) $\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} P_2=\frac{\frac{1}{2}(\Delta m)4\pi^2 4f^2A^2}{t}\overset{(8)}{\Rightarrow} P_2=4\,P_1\Rightarrow P_1=\frac{P_2}{4}$ (9)

Από (7) $\overset{(5)}{\underset{(6)}{\Rightarrow}}$ $P_3=\dfrac{\frac{1}{2}(\Delta m)4\pi^2 f^2 4A^2}{t}$ $\overset{(8)}{\Rightarrow}$ $P_3=4\,P_1 \Rightarrow P_1=\dfrac{P_3}{4}$ $\overset{(9)}{\Rightarrow}$ $P_1=\dfrac{P_2}{4}=\dfrac{P_3}{4}$

Δ₁.β

Δ₂.



Εάν υποθέσουμε ότι κατά μήκος της απόστασης d που οριοθετείται από τη θέση του φαροφύλακα και τη σημαδούρα σχηματίζονται Ν “όρη”, τότε

$d=(N-1)\lambda+\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow d=(2N-1)\dfrac{\lambda}{2}$ (1) (όπου λ= το μήκος κύματος).

Το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να φτάσει το κύμα από τη θέση του φαροφύλακα στη σημαδούρα είναι $\Delta t=\dfrac{d}{\upsilon} \Rightarrow d=\upsilon\Delta t$ (2) (όπου υ = η ταχύτητα διάδοσης του κύματος)

Από τις (1) και (2) : $(2N-1)\dfrac{\lambda}{2}=\upsilon\Delta t \Rightarrow (2N-1)\dfrac{\upsilon T}{2}=\upsilon\Delta t \Rightarrow \Delta t=(2N-1)\dfrac{T}{2}$ (3).

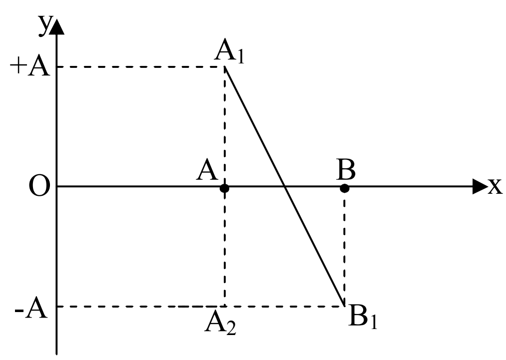
Επειδή το χρονικό διάστημα Δt αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα που ο φαροφύλακας παρατηρεί τρεις αναλαμπές, $\Delta t=2T_\varphi$ (4) όπου T_φ=η περίοδος φωτοβολίας του φάρου. Επίσης, επειδή ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικές διελεύσεις “όρους” από τη θέση του φαροφύλακα είναι ίσος με την περίοδο Τ του κύματος, T=2s (5).

Από (3) $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $2T_\varphi=(2N-1)\dfrac{T}{2}$ $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $2\cdot 10{,}5=(2N-1)\dfrac{2}{2} \Rightarrow N=11$

Ε₁. γ

Ε₂. Η εξίσωση του κύματος είναι $y=A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)$

η διαφορά φάσης των σημείων Α και Β κάθε χρονική στιγμή είναι: $\Delta\varphi=\varphi_A-\varphi_B \Rightarrow$



$\varphi_A-\varphi_B=2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x_A}{\lambda}\right)-2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow$

$\varphi_A-\varphi_B=2\pi\left(\dfrac{x_B-x_A}{\lambda}\right) \Rightarrow \varphi_A-\varphi_B=2\pi\dfrac{d}{\lambda}$ $\overset{d=\frac{3\lambda}{2}}{\Rightarrow}$

$\varphi_A-\varphi_B=3\pi \Rightarrow \varphi_A=3\pi+\varphi_B$ (1).

Η απομάκρυνση του σημείου Β είναι: $y_B=A\eta\mu\varphi_B$ $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $y_B=A\eta\mu(3\pi+\varphi_B) \Rightarrow y_B=-A\eta\mu\varphi_A \Rightarrow$ $y_B=-y_A$.

Άρα τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες απομακρύνσεις. Η μεταξύ τους απόσταση ℓ υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο $A_1 \hat{A}_2 B_1$: $\ell = \sqrt{\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 + (|y_A| + |y_B|)^2}$. Η απόσταση ℓ μεγιστοποιείται όταν $|y_A| = |y_B| = A$. Άρα $\ell_{max} = \sqrt{\frac{9\lambda^2}{4} + 4A^2}$. Με αριθμητική αντικατάσταση A=0,2m (2).

Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στη μέγιστη μεταξύ τους απόσταση ανά $\frac{T}{2}$, δηλαδή όταν βρίσκονται στις μέγιστες (και αντίθετης κατεύθυνσης) απομακρύνσεις τους, $\frac{T}{2}$=0,1 s$\Rightarrow$ T=0,2s$\Rightarrow$ f=5Hz (3).

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου είναι:

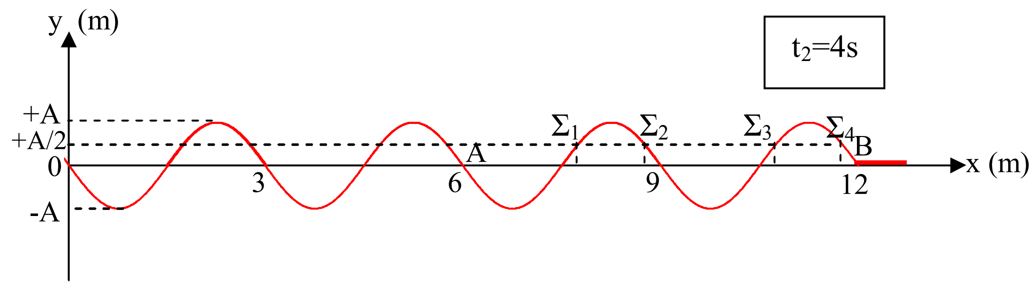
$|V_{max}| = \omega A \Rightarrow |V_{max}| = 2\pi f A \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} |V_{max}| = 2\pi \, m/s$.

ΣT_1. α

ΣT_2. Επειδή το σημείο Ο σε χρόνο $\Delta t = t_2 - 0 = 4s$, έχει φάση $\varphi_{(O)} = 8\pi$ rad, η γωνιακή συχνότητα ω θα είναι $\omega = \frac{\Delta\varphi_{(O)}}{\Delta t} \Rightarrow \omega = 2\pi \, rad/s \Rightarrow f = 1Hz$ (1).

Το κύμα σε χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1$ διανύει απόσταση Δx=d. Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = \frac{d}{t_2 - t_1} \Rightarrow \upsilon = 3\, m/s$ (2). Άρα $\lambda = \frac{\upsilon}{f} \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \lambda = 3m$. Επομένως η απόσταση d=6m των σημείων Α και Β αντιστοιχεί σε 2λ. Από το στιγμιότυπο κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 4s = 4T$, προκύπτει ότι μεταξύ των Α και Β υπάρχουν 4 σημεία με απομάκρυνση $y = +\frac{A}{2}$.

.



* Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από το γεγονός ότι η απόσταση d=6m των σημείων Α και Β αντιστοιχεί σε 2λ. Σε μήκος λ υπάρχουν 2 σημεία με απομάκρυνση $y = +\frac{A}{2}$ (διότι ένας ταλαντωτής σε χρόνο μιας περιόδου έχει δύο φορές απομάκρυνση $y = +\frac{A}{2}$), άρα σε μήκος 2λ θα υπάρχουν 4 σημεία.