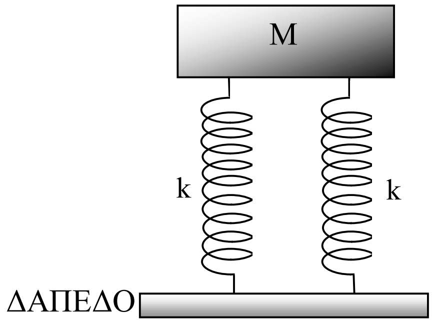
Εξαναγκασμένη ταλάντωση. Όταν ο διεγέρτης είναι μια ταλάντωση.



Το ομογενές τραπέζι ενός εργαστηρίου πειραμάτων Φυσικής, όπως αυτό του σχήματος, έχει μάζα M και συνδέεται μέσω δύο ιδανικών ελατηρίων σταθεράς k με κινητό δάπεδο. Το δάπεδο συγκρατείται ακίνητο ως προς το έδαφος και το σύστημα ισορροπεί. Εκτρέπουμε κατακόρυφα το τραπέζι από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο.

Α. Να δείξετε ότι το τραπέζι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητά της ω_0.

Β. Συνδέουμε το τραπέζι με μηχανισμό επιβράδυνσης ο οποίος ασκεί στο τραπέζι δύναμη της μορφής $F'=-bυ$, όπου b = η σταθερά απόσβεσης και υ = η ταχύτητα του τραπεζιού. Με κατάλληλο μηχανισμό θέτουμε το δάπεδο σε αμείωτη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=Αημωt$.

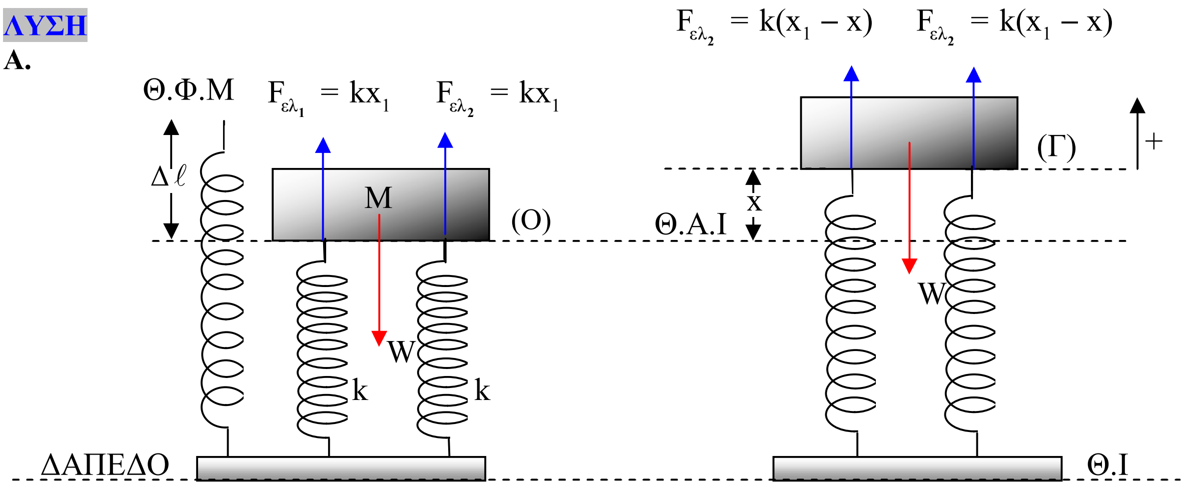
Β$_1$. Να δείξετε ότι η εξαναγκασμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει το τραπέζι, όταν αποκατασταθεί η μόνιμη κατάσταση, είναι ίδια με αυτήν που θα εκτελούσε, αν σ' αυτό επιδρούσε εξωτερική περιοδική δύναμη (διεγέρτης) της μορφής $F_δ=F_{0δ}\,ημ(ωt+θ)$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $F_{0δ}$ και θ.

Β$_2$. Αυξάνοντας τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του δαπέδου ω, παρατηρούμε ότι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το τραπέζι $A_{τρ}$ αυξάνεται σε σχέση με μία αρχική τιμή, μεγιστοποιείται και στη συνέχεια ελαττώνεται. Με βάση το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογίσετε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του τραπεζιού $A_{τρ}$ σε συνάρτηση με την γωνιακή συχνότητα ω, αφού θεωρήσετε ότι η εξίσωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το τραπέζι είναι της μορφής $x=A_{τρ}ημωt$. Να διερευνήσετε τη σχέση μεταξύ του πλάτους $A_{τρ}$ και του πλάτους A της ταλάντωσης που εκτελεί το δάπεδο, για τις διάφορες δυνατές τιμές της γωνιακής συχνότητας ω. Να σχεδιάσετε ποιοτικά τη γραφική παράσταση $A_{τρ}=f(ω)$, στην οποία να απεικονίζεται και η τιμή του πλάτους ταλάντωσης του δαπέδου A.

Γ. Στο τραπέζι πρόκειται να τοποθετήσουμε μια ευαίσθητη συσκευή Laser, την οποία θέλουμε να προφυλάξουμε από ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους. Από πειραματικές μετρήσεις γνωρίζουμε ότι για την προστασία της συσκευής ,είναι επιθυμητή για το τραπέζι τιμή ιδιοσυχνότητας $f_0=1Hz$.Αν η σταθερά των ελατηρίων είναι k=800N/m, να υπολογιστεί η μάζα M του τραπεζιού. Για ποιες τιμές της συχνότητας f της ταλάντωσης του δαπέδου η συσκευή είναι ασφαλής; Ποιος ο ρόλος της μάζας M του τραπεζιού στην απόσβεση – εξασθένιση του πλάτους των ταλαντώσεων που εκτελεί το τραπέζι ;Ποιος ο ρόλος της τιμής του παράγοντα απόσβεσης $\frac{b}{M}$; Να θεωρήσετε ως θετική φορά για την απομάκρυνση του τραπεζιού την αντίθετη του βάρους. Δίνονται : ημ(α+β)= ημασυνβ+ημβσυνα , $\pi^2=10$, $\sqrt{2}=1,4$, .

ΛΥΣΗ

Α.



Από την συνθήκη αρχικής ισορροπίας στην θέση (Ο) του τραπεζιού:

$$\Sigma F_{(O)}=0 \Rightarrow 2F_{ελ_1}-W=0 \Rightarrow Mg=2k\Delta l \quad (1)$$

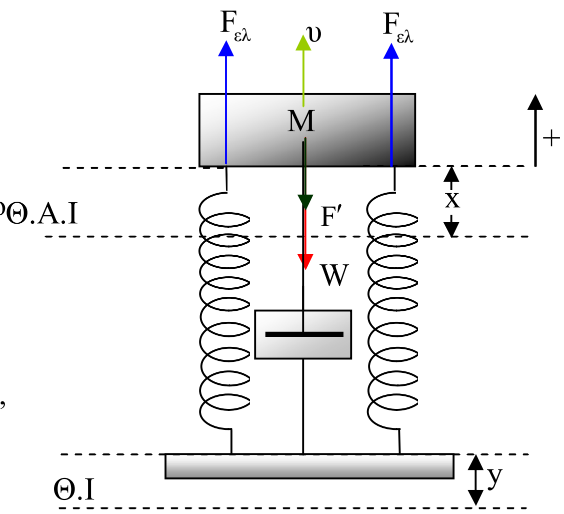
Εκτρέπουμε το τραπέζι προς τα πάνω κατά x και το αφήνουμε ελεύθερο στην θέση (Γ):

$$\Sigma F_{(\Gamma)} = 2F_{\varepsilon\lambda_2} - W \Rightarrow \Sigma F_{(\Gamma)} = 2k(\Delta l - x) - Mg \Rightarrow \Sigma F_{(\Gamma)} = 2k\Delta l - 2kx - Mg \overset{(1)}{\Rightarrow} \Sigma F_{(\Gamma)} = -2kx.$$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D=2k (2) $\Rightarrow$

$$M\omega_0^2 = 2k \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}\ . \ (3)$$

B₁.



Προσαρμόζουμε στο τραπέζι το μηχανισμό απόσβεσης (dashpot*) και θέτουμε το δάπεδο σε αμείωτη αρμονική ταλάντωση της μορφής y=Αημωt. Το τραπέζι μετά την αποκατάσταση μόνιμης κατάστασης εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση. Κάποια χρονική στιγμή που το δάπεδο έχει απομακρυνθεί κατά y από την θέση ισορροπίας του (Θ.Ι) και το τραπέζι αντίστοιχα κατά x από την θέση ισορροπίας του (Ο), ο δεύτερος νόμος του Newton για το τραπέζι δίνει:

$\Sigma F = Ma \Rightarrow 2F_{\varepsilon\lambda} - W - F' = Ma$ (4)

Όταν η απομάκρυνση του τραπεζιού είναι x, και του δαπέδου y, η ταχύτητα του τραπεζιού υ, είναι $\upsilon = \frac{d(x-y)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \Rightarrow$

$$\upsilon = \upsilon_x - \upsilon_y \quad (5)$$

και η δύναμη απόσβεσης που δέχεται είναι $F' = -b(\upsilon_x - \upsilon_y)$.

Ο όρος $2F_{\varepsilon\lambda} - W$, αντιστοιχεί στην δύναμη μεταφοράς $F_{\varepsilon\pi}$ της ελεύθερης αμείωτης αρμονικής ταλάντωσης,

άρα $2F_{\varepsilon\lambda} - W = F_{\varepsilon\pi} \Rightarrow 2F_{\varepsilon\lambda} - W = -D(x-y) \overset{(2)}{\Rightarrow} 2F_{\varepsilon\lambda} - W = 2k(x-y)$ (6).

Από (4) $\overset{(6)}{\Rightarrow} -2k(x-y) - b\upsilon = Ma \Rightarrow -2kx + 2ky - b\upsilon = Ma \overset{(5)}{\Rightarrow} -2kx + 2ky - b\upsilon_x + b\upsilon_y = Ma \Rightarrow$

$$-2kx - b\upsilon_x + 2ky + b\upsilon_y = Ma \quad (7).$$

Στην περίπτωση που το δάπεδο παρέμενε ακίνητο και το τραπέζι δεχόταν την επίδραση μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης (διεγέρτης) F_δ, η κίνηση του τραπεζιού θα μπορούσε να περιγραφεί με μία εξίσωση αντίστοιχη της (7). Στην περίπτωση αυτή ο δεύτερος νόμος του Newton για το τραπέζι θα έδινε :

$$2F'_{\varepsilon\lambda} - W - F' + F_\delta = Ma \underset{y=0}{\overset{(6)}{\Rightarrow}} -2kx - F' + F_\delta = Ma \underset{\upsilon_y=0}{\overset{(5)}{\Rightarrow}} -2kx - b\upsilon_x + F_\delta = Ma \quad (8)$$

Από την σύγκριση των (7) και (8) προκύπτει : $F_\delta = 2ky + b\upsilon_y \Rightarrow F_\delta = 2k\,A\eta\mu\omega t + b\omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow$

$F_\delta = 2k\,A(\eta\mu\omega t + \frac{b\omega}{2k}\sigma\upsilon\nu\omega t)$. Θέτουμε $\varepsilon\varphi\theta = \frac{b\omega}{2k}$ (9). Η τελευταία σχέση γράφεται :

$$F_\delta = 2k\,A(\eta\mu\omega t + \varepsilon\varphi\theta\sigma\upsilon\nu\omega t) \Rightarrow F_\delta = 2k\,A\left(\frac{\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega t}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right) \Rightarrow F_\delta = \frac{2kA}{\sigma\upsilon\nu\theta}\eta\mu(\omega t+\theta) \quad (10).$$

Δίχως βλάβη της γενικότητας: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta} \overset{(9)}{\Rightarrow} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \sqrt{1+\frac{b^2\omega^2}{4k^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\sqrt{4k^2+b^2\omega^2}}{2k}$ (11)

Από (10) $\overset{(11)}{\Rightarrow} F_\delta = A\left(\sqrt{4k^2+b^2\omega^2}\right)\eta\mu(\omega t+\theta) \Rightarrow F_\delta = F_{0\delta}\,\eta\mu(\omega t+\theta)$ (12), με

$$F_{0\delta} = A\left(\sqrt{4k^2+b^2\omega^2}\right) \ (13). \text{Από (9)} \overset{(3)}{\Rightarrow} \varepsilon\varphi\theta = \frac{b\omega}{M\omega_0^2} \quad (14).$$

B₂. Με βάση το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του τραπεζιού $A_{\tau\rho}$. Δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέσαμε ότι η εξίσωση απομάκρυνσης του τραπεζιού από τη θέση αρχικής ισορροπίας του (Ο) είναι της μορφής $x = A_{\tau\rho}\eta\mu\omega t$ και η ταχύτητά του $\upsilon_x = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t$.

$$\text{Από (8)} \overset{(12)}{\Rightarrow} -2kA_{\tau\rho}\eta\mu\omega t - b\omega A_{\tau\rho}\sigma\upsilon\nu\omega t + F_{0\delta}\,\eta\mu(\omega t+\theta) = Ma \Rightarrow$$

$$-2kA_{τρ}ημωt - bωA_{τρ}συνωt + F_{0δ}συνθ\,ημωt + F_{0δ}\,ημθσυνωt = -Mω^2A_{τρ}ημωt \Rightarrow$$

$$(-2kA_{τρ} + F_{0δ}συνθ)\,ημωt + (-bωA_{τρ} + F_{0δ}\,ημθ)\,συνωt = -Mω^2A_{τρ}ημωt$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα $\forall\ t>0$ πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l}-2kA_{τρ} + F_{0δ}συνθ = -Mω^2A_{τρ}\\ -bωA_{τρ} + F_{0δ}ημθ = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}F_{0δ}συνθ = 2kA_{τρ} - Mω^2A_{τρ}\\ F_{0δ}ημθ = bωA_{τρ}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}F_{0δ}^2συν^2θ = (2kA_{τρ} - Mω^2A_{τρ})^2\\ F_{0δ}^2ημ^2θ = (bωA_{τρ})^2\end{array}\right\}$$

Προσθέτουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη: $F_{0δ}^2 = (2k - Mω^2)^2 A_{τρ}^{\ 2} + b^2ω^2A_{τρ}^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$$A_{τρ}^2 = \frac{F_{0δ}^2}{M^2(ω_0^2 - ω^2)^2 + b^2ω^2} \overset{(13)}{\Rightarrow} A_{τρ}^2 = \frac{A^2\left(\sqrt{4k^2 + b^2ω^2}\right)^2}{M^2(ω_0^2 - ω^2)^2 + b^2ω^2} \overset{(3)}{\Rightarrow} A_{τρ}^2 = \frac{A^2\left(M^2ω_0^4 + b^2ω^2\right)}{M^2(ω_0^2 - ω^2)^2 + b^2ω^2} \Rightarrow$$

$$A_{τρ}^2 = \frac{A^2\left(ω_0^4 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2}\right)}{(ω_0^2 - ω^2)^2 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2}} \Rightarrow A_{τρ}^2 = \frac{A^2\left(ω_0^4 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2}\right)}{ω_0^4 - 2ω^2ω_0^2 + ω^4 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2}} \Rightarrow A_{τρ}^2 = \frac{A^2\left(ω_0^4 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2}\right)}{ω_0^4 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2} + ω^2(ω^2 - 2ω_0^2)} \Rightarrow$$

$$A_{τρ} = A\sqrt{\frac{ω_0^4 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2}}{ω_0^4 + \dfrac{b^2ω^2}{M^2} + ω^2(ω^2 - 2ω_0^2)}} \quad (15).$$

Θα επιχειρήσουμε να διερευνήσουμε τη σχέση (15):

Αν $ω^2 = 2ω_0^2$ ή $ω = ω_0\sqrt{2}$, τότε $A_{τρ}=A$..

Αν $ω^2 < 2ω_0^2$ ή $ω < ω_0\sqrt{2}$, τότε $A_{τρ}>A$.

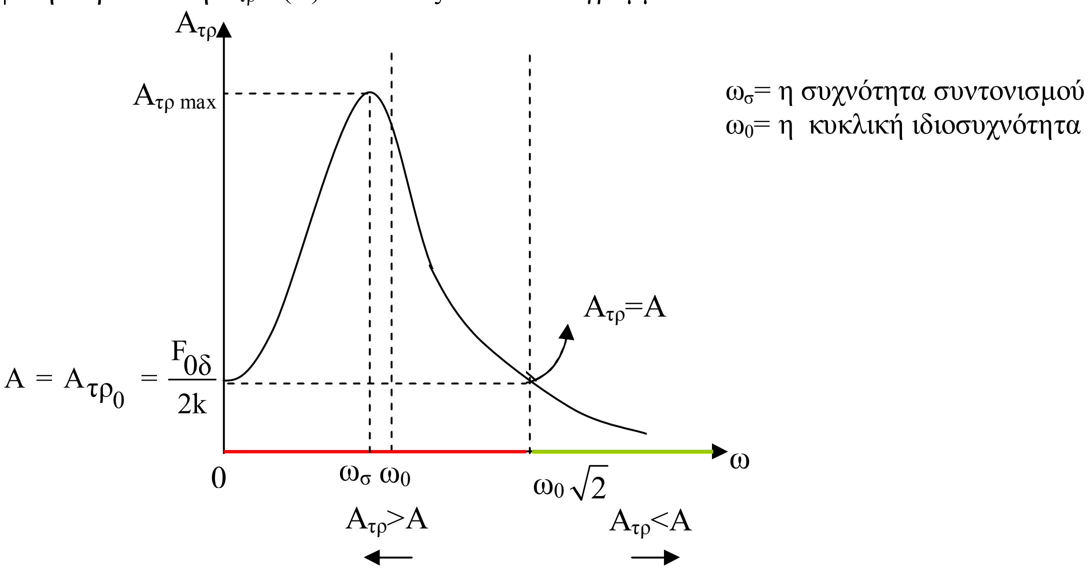
Αν $ω^2 > 2ω_0^2$ ή $ω > ω_0\sqrt{2}$, τότε $A_{τρ}<A$.

Δηλαδή αν ο στόχος είναι να απορροφηθούν – αποσβεστούν οι ταλαντώσεις του κινητού δαπέδου, τότε πρέπει $ω > ω_0\sqrt{2}$.

Όταν $ω \to 0$, από την (15) προκύπτει $A_{τρ_0} = A$. Η τελευταία ισότητα επαληθεύει τη σχέση $A_{τρ_0} = \dfrac{F_{0δ}}{D}$.

Πράγματι $A_{τρ_0} = \dfrac{F_{0δ}}{2k} \overset{(13)}{\Rightarrow} A_{τρ_0} = \dfrac{A\left(\sqrt{4k^2 + b^2ω^2}\right)}{2k} \overset{(ω=0)}{\Rightarrow} A_{τρ_0} = A.$

Η γραφική παράσταση $A_{τρ}=f(ω)$ απεικονίζεται στο διάγραμμα :



Ξ. Στεργιάδης

Γ.Από την (3):$2\pi f_0=\sqrt{\frac{2k}{M}} \Rightarrow 4\pi^2 f_0^2=\frac{2k}{M} \Rightarrow M=\frac{2k}{4\pi^2 f_0^2} \Rightarrow M=40$ Kg.

Προφανώς από την συνθήκη $\omega > \omega_0\sqrt{2}$ για την οποία $A_{\tau\rho}<A$, προκύπτει ότι ,επιθυμητό είναι η κυκλική ιδιοσυχνότητα του τραπεζιού (άρα και η ιδιοσυχνότητα f_0) να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη, οπότε η συσκευή να προφυλάσσεται για όσο το δυνατόν μεγαλύτερη περιοχή τιμών της γωνιακής συχνότητας ω ταλάντωσης του κινητού δαπέδου, δηλαδή ο περιορισμός της «κόκκινης» περιοχής συχνοτήτων 0 έως $\omega_0\sqrt{2}$.Στην συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει : $\omega > \omega_0\sqrt{2} \Rightarrow f > f_0\sqrt{2} \Rightarrow f > 1,4$ Hz.
Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα Μ του τραπεζιού, τόσο μεγαλύτερη αδράνεια εξασφαλίζουμε , άρα τόσο μικρότερη γίνεται η τιμή της κυκλικής ιδιοσυχνότητας ω_0.
Αν η συχνότητα ταλάντωσης του δαπέδου ω γίνει ίση με ω_0 ($\omega=\omega_0$), τότε για την τιμή του πλάτους $A_{\tau\rho}$ από την (15) προκύπτει: $A_{\tau\rho}=A\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\frac{b^2}{M^2}}+1}$. Από την τελευταία είναι προφανές ότι για τον παράγοντα $\frac{b}{M}$,είναι επιθυμητή όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή ,ώστε να ελαττώνεται το πλάτος ταλάντωσης του τραπεζιού, όταν η γωνιακή συχνότητα ω παίρνει τιμές που πλησιάζουν την κυκλική ιδιοσυχνότητα ω_0 (συντονισμός).