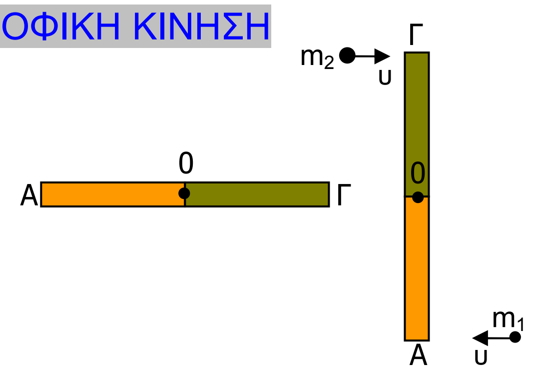
ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ - ΚΡΟΥΣΗ ΚΑΙ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Δύο ομογενείς ράβδοι ΟΑ και ΟΓ του ίδιου μήκους L έχουν κατασκευαστεί η πρώτη από σίδηρο και η δεύτερη από ξύλο. Οι δύο ράβδοι έχουν συνενωθεί στο σημείο Ο κατάλληλα ώστε να μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές περί οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο των δύο ράβδων. Αρχικά οι ράβδοι συγκρατούνται οριζόντιες. Κάποια στιγμή (t=0) το σύστημα αφήνεται ελεύθερο.



Α$_1$. Να βρεθεί η έκφραση της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος σε συνάρτηση με τη γωνία στροφής φ, $\alpha_{γων} = \alpha_{γων}(φ)$ και να γίνει η γραφική παράστασή της για τιμές της γωνίας στροφής $0 \leq φ \leq 2π$. Να υπολογιστεί η τιμή της $\alpha_{γων}$ όταν το σύστημα βρεθεί για πρώτη φορά στην κατακόρυφη θέση.

Α$_2$..Σε ποιά θέση το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος γίνεται μέγιστο; Ποιά η τιμή του;

Α$_3$. Να βρεθεί η έκφραση της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος σε συνάρτηση με τη γωνία στροφής φ, ω=ω(φ) και να υπολογιστεί η τιμή της , όταν το σύστημα βρεθεί για πρώτη φορά στην κατακόρυφη θέση.

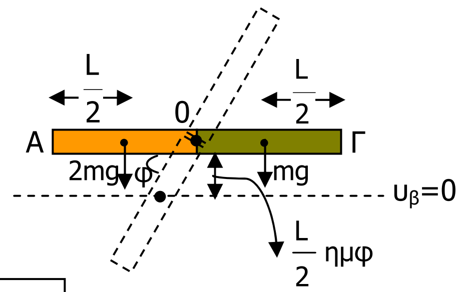
Να υπολογιστούν οι τιμές των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ όταν το σύστημα βρεθεί για πρώτη φορά στην κατακόρυφη θέση.

Β$_1$. Όταν το σύστημα διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση δύο βλήματα αμελητέων διαστάσεων με μάζες m_1=m και m_2=2m που κινούνται οριζόντια με ταχύτητες αντιθέτων κατευθύνσεων -όπως φαίνεται στο σχήμα- και του ίδιου μέτρου με αυτό των ταχυτήτων των άκρων των ράβδων Α και Γ αντίστοιχα, σφηνώνονται ταυτόχρονα στα άκρα Α και Γ των ράβδων αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος που δημιουργείται αμέσως μετά την κρούση.

Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.Δίνεται ότι για τις μάζες των δύο ράβδων ισχύει $m_{ΟΑ}$=2m και $m_{ΟΓ}$=m, m=0,1Kg και L=0,5m.Η ροπή αδρανείας ράβδου μάζας Μ και μήκους L ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{(cm)}=\frac{1}{12}ML^2$ και $g=10m/s^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α$_1$.Με εφαρμογή του Θεωρήματος Steiner υπολογίζουμε την ροπή αδράνειας κάθε ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής τους που διέρχεται από το 0:



(Σχήμα 1)

$I_{ΟΑ(Ο)}=I_{(cm)} + m_{ΟΑ}\frac{L^2}{4} \Rightarrow I_{ΟΑ(Ο)}=\frac{1}{3} m_{ΟΑ} L^2 \Rightarrow$

$I_{ΟΑ(Ο)}=\frac{1}{3} 2m L^2$(1).

Αντίστοιχα για τη ράβδο ΟΓ: $I_{ΟΓ(Ο)}=I_{(cm)} + m_{ΟΓ}\frac{L^2}{4} \Rightarrow I_{ΟΓ(Ο)}=\frac{1}{3} m_{ΟΓ} L^2 \Rightarrow I_{ΟΓ(Ο)}=\frac{1}{3} m L^2$(2).Η ροπή αδρανείας του συστήματος ως προς άξονα που διέρχεται από το Ο είναι:

$I_{ΟΛ(Ο)}= I_{ΟΑ(Ο)} + I_{ΟΓ(Ο)} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} I_{ΟΛ(Ο)}= m L^2$ (3).

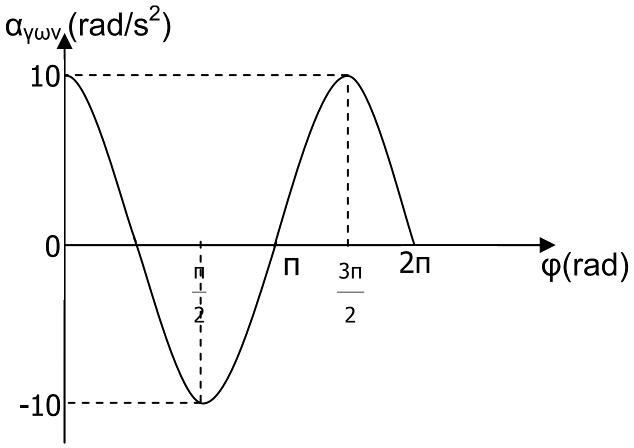
Όταν το σύστημα έχει στραφεί ως προς την αρχική οριζόντια θέση του κατά γωνία φ,εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την στροφική κίνηση,θεωρώντας ως θετικές τις αριστερόστροφες ροπές:

$$\Sigma\tau_{(o)}= I_{O\Lambda(O)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \overset{(3)}{\Rightarrow} m_{OA}\, g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - m_{O\Gamma}\, g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = m\,L^2\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$2\,m\,g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - m\,g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = m\,L^2\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{g\sigma\upsilon\nu\varphi}{2L} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} =10\ \sigma\upsilon\nu\varphi$ (4).Η γραφική πάρασταση της (4) είναι:

φ(rad)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\alpha_{\gamma\omega\nu}$(rad/s)	10	0	-10	0	10



Από την (4) προκύπτει ότι για $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (κατακόρυφη θέση): $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ =0 rad/s.

A$_2$.Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος δίνεται από την γενικευμένη μορφή του Θεμελιώδους Νόμου της στροφικής κίνησης: $\Sigma\tau_{(o)}=\frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I_{O\Lambda(O)}\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} \frac{dL}{dt} = m\,L^2\,\frac{g\sigma\upsilon\nu\varphi}{2L} \Rightarrow \frac{dL}{dt}$ =0,25συνφ . Η μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής είναι : $\left|\frac{dL}{dt}\right|_{max}$=0,25Kg m^2/s^2 όταν $|\sigma\upsilon\nu\varphi|$=1 δηλαδή ,φ=0 ή φ=π rad ,άρα όταν το σύστημα βρίσκεται στην οριζόντια θέση.

A$_3$.Στο σύστημα επιδρούν οι συντηρητικές δυνάμεις των βαρών των ράβδων ΟΑ και ΟΓ και η δύναμη από τον άξονα που δεν παράγει έργο .Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σύστημα στην αρχική του θέση (I) και σε μία τυχαία θέση του(II) όπου έχει περιστραφεί κατά γωνία φ. (Σχήμα 1) Ορίζουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση του κέντρου μάζας της ράβδου ΟΑ στη θέση (ΙΙ) :

$$E_{M(I)}= E_{M(II)} \Rightarrow m_{OA}\, g\frac{L}{2}\eta\mu\varphi+ m_{O\Gamma}\, g\frac{L}{2}\eta\mu\varphi=0+ m_{O\Gamma}\, g\, 2\frac{L}{2}\eta\mu\varphi+\frac{1}{2}\, I_{O\Lambda(O)}\omega^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$2m\, g\frac{L}{2}\eta\mu\varphi+ m\, g\frac{L}{2}\eta\mu\varphi=0+ m\, g\, 2\,\frac{L}{2}\eta\mu\varphi+\frac{1}{2}\, m\, L^2\omega^2\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{g\eta\mu\varphi}{L}}$$

(5). Στην κατακόρυφη θέση, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ και : $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \omega=\sqrt{20}$ rad/s $\Rightarrow$ $\omega=2\sqrt{5}$ rad/s. (5) Οι γραμμικές ταχύτητες περιστροφής των άκρων Ακαι Γ στην κατακόρυφη θέση είναι:

$υ_A=υ_\Gamma=\omega L \Rightarrow υ_A=υ_\Gamma=\sqrt{5}$ m/s.

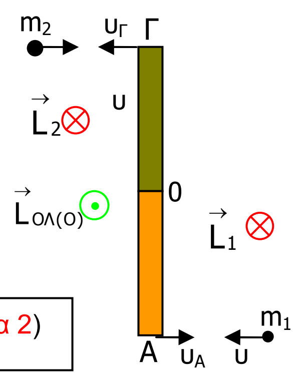
B$_1$.Κατά την κρούση των δύο βλημάτων με το σύστημα των δύο ράβδων όταν αυτό βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, ισχύει $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\omega}\nu\ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\omega\nu\ (o)}=0$.Εφαρμόζουμε την Αρχή διατήρησης της στροφορμής: $\vec{L}_{(O\Lambda),\Pi PIN}=\vec{L}_{(O\Lambda),META}$ και αντικαθιστούμε τις τιμές των στροφορμών που ως διανύσματα είναι συγγραμμικά διότι έχουν διεύθυνση κάθετη στο κατακόρυφο επίπεδο κίνησης των ράβδων και των βλημάτων, θεωρώντας ως θετικές τις τιμές των στροφορμών που έχουν φορά προς τα έξω $\odot$ (Σχήμα 2):

$$I_{O\Lambda(O)}\,\omega- m_1υL -m_2υ\, L\ =(I_{O\Lambda(O)} + m_1\, L^2+ m_2\, L^2)\, \omega' \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$mL^2\, \omega-2m\, υ\, L-m\, υL =(mL^2+m\, L^2+2m\, L^2)\, \omega' \Rightarrow$$

$$mL^2\, \omega-2m\omega\, L^2-m\omega\, L^2=4mL^2\, \omega' \Rightarrow\ \omega'=-\frac{\omega}{2} \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

ω'=-$\sqrt{5}$ rad/s.Το συσσωμάτωμα των δύο ράβδων και των δύο βλημάτων μετά την κρούση θα περιστέφεται κατά την αντίθετη κατεύθυνση.



(Σχήμα 2)

ΣΧΟΛΙΑ

1.Το θέμα που παρουσιάζεται έχει ως στόχο να υπενθυμίσει ότι όταν στη στροφική κίνηση η γωνιακή επιτάχυνση δεν είναι σταθερή ($\alpha_{\gamma\omega\nu} \neq$ σταθερή) ο υπολογισμός ττης γραμμικής ταχύτητας περιστροφής ($υ_{\gamma\rho}$) καθώς και της γωνιακής ταχύτητας (ω) γίνεται με τη χρήση των Αρχών Διατήρησης (Μηχανικής Ενέργειας, Στροφορμής κ.λπ) και **ΟΧΙ** με τη χρήση των εξισώσεων της κινηματικής.(ερώτημα **Α$_3$**)

2.Το ερώτημα **Β$_1$** ετέθη για να δειχθεί ότι τα μεγέθη των Στροφορμών είναι **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ** ακόμα και όταν είναι συγγραμμικά. Επομένως η διανυσματική άθροιση όταν μετατρέπεται σε αλγεβρική χρειάζεται προσοχή.

Ξ . Στεργιάδης