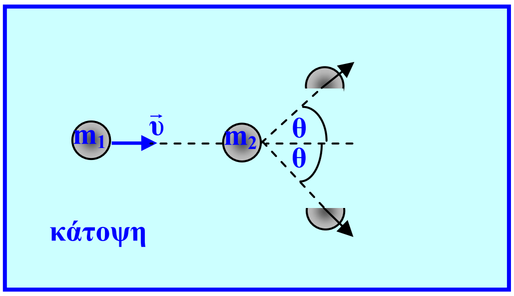
Περί κρούσεων ο λόγος

Ερώτηση 1η

Σφαίρα $Σ_1$ μάζας $m_1=m$ που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου υ, συγκρούεται μετωπικά με ακίνητη σφαίρα $Σ_2$ ίδιας ακτίνας και μάζας $m_2=2m$.Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα $Σ_2$ διασπάται σε δύο κομμάτια ίσων μαζών που κινούνται με ταχύτητες ίδιου μέτρου οι οποίες σχηματίζουν με την οριζόντια διεύθυνση xx΄ ίσες γωνίες $\hat{\theta}$ με $0 < \hat{\theta} < 90°$,ενώ η σφαίρα $Σ_1$ ακινητοποιείται. Για τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο κομματιών της σφαίρας $Σ_2$ ισχύει ότι:

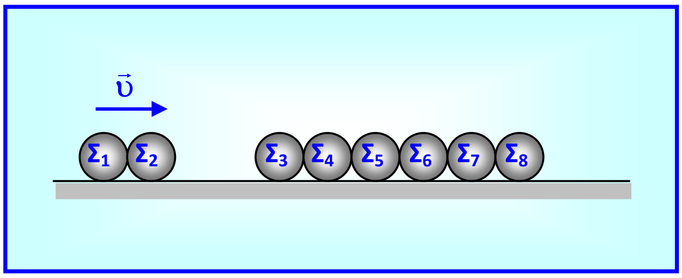


α. είναι ίσα με $\frac{υ}{2}$ **β.** είναι μικρότερα από $\frac{υ}{2}$ **γ.** είναι μεγαλύτερα από $\frac{υ}{2}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 2η

Οι σφαίρες $Σ_1$, $Σ_2$, ... $Σ_8$ είναι όμοιες και τελείως ελαστικές. Οι σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ κινούνται προς τα δεξιά με την ίδια ταχύτητα μέτρου υ ευρισκόμενες σε επαφή. Μετά το τέλος όλων των κεντρικών ελαστικών κρούσεων που θα συμβούν



α. η σφαίρα $Σ_8$ κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου 2υ και οι υπόλοιπες ηρεμούν.

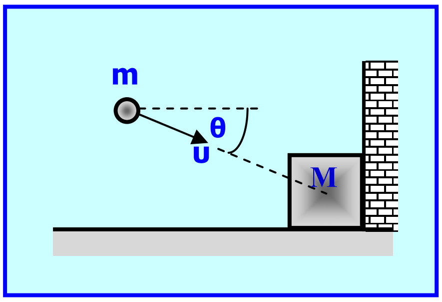
β. οι σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ ηρεμούν και οι υπόλοιπες ($Σ_3$, ..., $Σ_8$) κινούνται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $\frac{υ}{6}$ η καθεμία.

γ. οι σφαίρες $Σ_7$ και $Σ_8$ κινούνται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου υ η καθεμία και οι υπόλοιπες ηρεμούν.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 3η

Το βλήμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα μέτρου υ η οποία σχηματίζει γωνία $\hat{\theta}=30^o$ με την οριζόντια διεύθυνση συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας M=4m που βρίσκεται σε επαφή με το κατακόρυφο εμπόδιο. Αν K_{min} είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το βλήμα, ώστε να σφηνωθεί πλήρως στο σώμα και $K΄_{min}$ η αντίστοιχη ελάχιστη κινητική ενέργεια που απαιτείται για να σφηνωθεί πλήρως το βλήμα στο σώμα, όταν η κρούση επαναλαμβάνεται και το σώμα είναι ελεύθερο να κινηθεί, τότε με την παραδοχή ότι η απώλεια κινητικής ενέργειας και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια, το (%) ποσοστό της μεταβολής της ελάχιστης κινητικής ενέργειας στη δεύτερη περίπτωση σε σχέση με την πρώτη είναι:

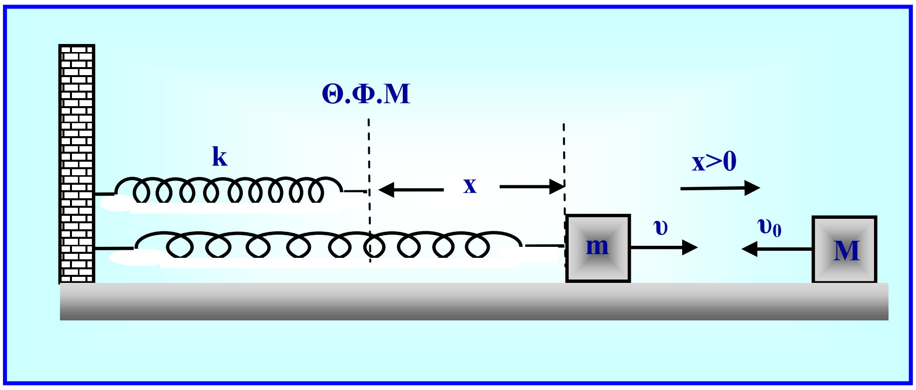


α. 17,65% **β.** 20% **γ.** 25%

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 4η

Το σώμα μάζας m του σχήματος είναι συνδεδεμένο με το ένα άκρο του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k του σχήματος και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και σταθεράς επαναφοράς D=k στο λείο οριζόντιο επίπεδο και καθώς βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x=+\frac{A\sqrt{3}}{2}$ και κινείται προς την θετική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου υ, συγκρούεται μετωπικά με δεύτερο σώμα μάζας M=3m που κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν που κινείται το σώμα μάζας m.Η κρούση είναι πλαστική και η διάρκειά της θεωρείται αμελητέα. Αν υ_{01} είναι η τιμή του μέτρου της ταχύτητας υ_0 για την οποία το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το



συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την κρούση παραμένει Α και υ_{02} είναι η τιμή του μέτρου της ταχύτητας υ_0 για την οποία το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την κρούση γίνεται ελάχιστο, τότε

α. $\dfrac{\upsilon_{o1}}{\upsilon_{o2}} = 3$ **β.** $\dfrac{\upsilon_{o1}}{\upsilon_{o2}} = \dfrac{1}{3}$ **γ.** $\dfrac{\upsilon_{o1}}{\upsilon_{o2}} = \sqrt{3}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

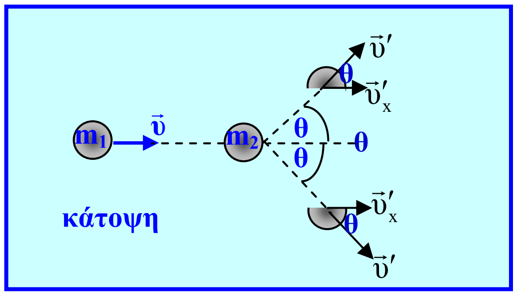
Ερώτηση 1η

γ.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης των δύο σφαιρών και στη διάσπαση της σφαίρας μάζας m_2 που αμέσως ακολουθεί, η ορμή του συστήματος διατηρείται. Στην οριζόντια διεύθυνση xx΄:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi,x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,x} \overset{+}{\underset{\to}{\Rightarrow}} m\upsilon = 2m\upsilon'\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} \Rightarrow \upsilon' = \frac{\upsilon}{2\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}}.$$

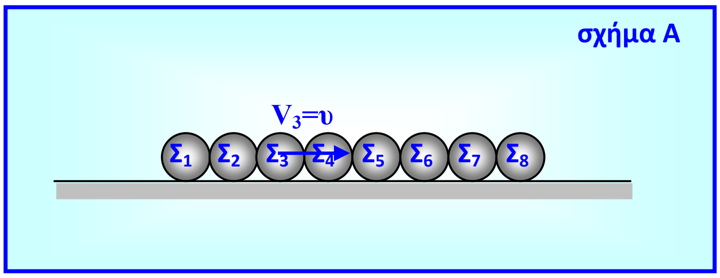
Επειδή $0 < \hat{\theta} < 90°$, $\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} < 1$, άρα $\upsilon' > \dfrac{\upsilon}{2}$.



Ερώτηση 2η

γ.

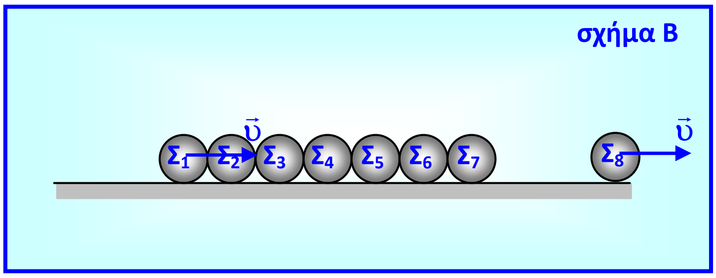
Για την τελείως ελαστική κρούση $\Sigma_2 - \Sigma_3$ επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και η Σ_3 είναι αρχικά ακίνητη έχουμε ότι $V_3=\upsilon$, όπου V_3= η προς τα δεξιά ταχύτητα της σφαίρας Σ_3 αμέσως μετά την κρούση (**σχήμα Α**). Στη συνέχεια μετά από τις διαδοχικές τελείως ελαστικές κρούσεις που ακολουθούν η Σ_8 θα κινηθεί προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $V_8=\upsilon$ (**σχήμα Β**).

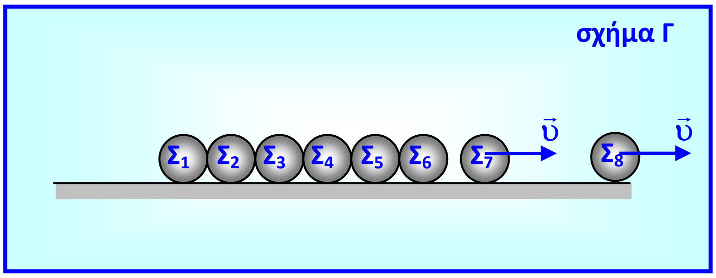


Επειδή η Σ_2 ακινητοποιείται αμέσως μετά την κρούση της με τη Σ_3 ($V_2=0$), ακολουθεί τελείως ελαστική κρούση μεταξύ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά από την οποία ακινητοποιείται η σφαίρα Σ_1 και η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται πάλι με τη σφαίρα Σ_3 η οποία είχε ήδη ακινητοποιηθεί μετά την τελείως ελαστική κρούση της με τη σφαίρα Σ_4 ($V'_3=0$).

Μετά τις νέες διαδοχικές τελείως ελαστικές κρούσεις που ακολουθούν η σφαίρα Σ_7 κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $V_7=\upsilon$ (**σχήμα Γ**).

Άρα μετά το τέλος όλων των κρούσεων δύο σφαίρες –η Σ_7 και Σ_8– θα κινηθούν προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου υ η καθεμία και οι υπόλοιπες έξι ($\Sigma_1 ... \Sigma_6$) θα παραμείνουν ακίνητες.

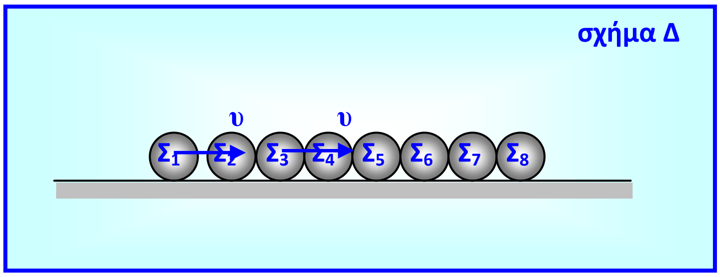


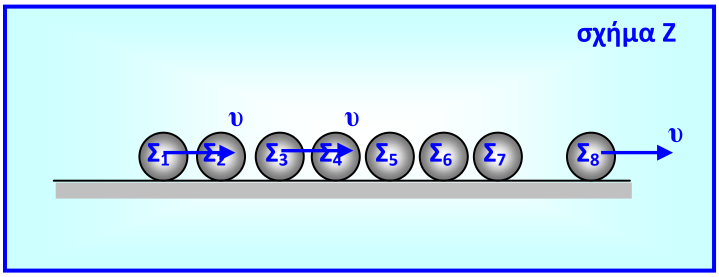


Σχόλια

1. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο διότι η αρχική ορμή του συστήματος έχει μέτρο $P_{αρχ}=2mυ$ και επειδή στις διαδοχικές ελαστικές κρούσεις που ακολουθούν η ορμή διατηρείται θα πρέπει και η τελική ορμή του συστήματος να έχει μέτρο $P_{τελ}=2mυ$ που αντιστοιχεί στη συνολική ορμή των σφαιρών $Σ_7$ και $Σ_8$ οι οποίες μετά το τέλος όλων των κρούσεων κινούνται διακριτά προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου υ.

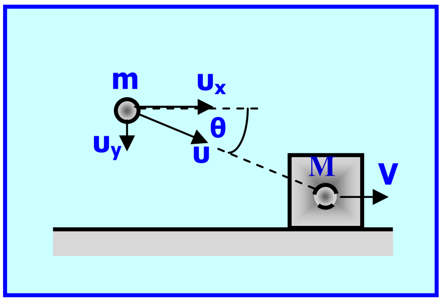
2. Η εξαγωγή του συμπεράσματος διευκολύνεται αν θεωρήσουμε ότι οι σφαίρες απέχουν «απειροελάχιστα» (**σχήματα Δ και Ζ**):





Ερώτηση 3η

α.



Όταν το σώμα είναι σε επαφή με το κατακόρυφο εμπόδιο το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την πλαστική κρούση δεν κινείται. Από τη αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα βλήμα – σώμα στην περίπτωση που το βλήμα μόλις σφηνώνεται στο σώμα έχουμε: $K_{min} = Q = \frac{1}{2}mυ^2$ **(1)**

Όταν το συσσωμάτωμα είναι ελεύθερο να κινηθεί η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή στην οριζόντια διεύθυνση xx΄:

$$\vec{P}_{αρχx} = \vec{P}_{τελx} \overset{+\rightarrow}{\Rightarrow} mυ_x = (m+M)V \Rightarrow mυσυν30^o = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{mυ\sqrt{3}}{2(M+m)} \overset{M=4m}{\Rightarrow} V = \frac{υ\sqrt{3}}{10} \quad \textbf{(2)}.$$

Επειδή η απώλεια ενέργειας είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$K'_{min} = Q + K_{τελ} \Rightarrow K'_{min} = Q + \frac{1}{2}(M+m)V'^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} K'_{min} = Q + \frac{1}{2}(M+m)\frac{3υ'^2}{10} \overset{M=4m}{\Rightarrow}$$

$$K'_{min} = Q + \frac{1}{2}5m\frac{3υ'^2}{100} \overset{(1)}{\Rightarrow} K'_{min} = K_{min} + \frac{15K'_{min}}{100} \Rightarrow \frac{85K'_{min}}{100} = K_{min} \Rightarrow \frac{K'_{min}}{K_{min}} = \frac{100}{85} \quad \textbf{(3)}.$$

Όπου υ΄ = η ταχύτητα πρόσπτωσης του βλήματος, όταν το σύστημα είναι ελεύθερο και V΄= η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

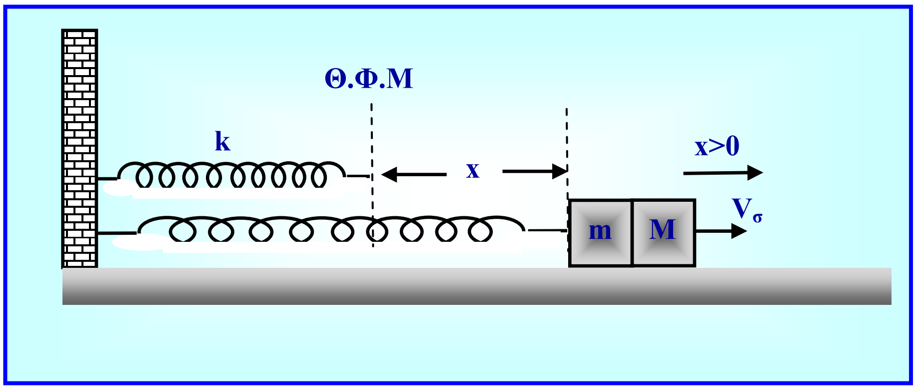
Το (%) ποσοστό της μεταβολής της ελάχιστης κινητικής ενέργειας είναι:

$$π(\%) = \frac{ΔK_{min}}{K_{min}}100\% \Rightarrow π(\%) = \frac{K'_{min} - K_{min}}{K_{min}}100\% \overset{(3)}{\Rightarrow} π(\%) = \left(\frac{K'_{min}}{K_{min}} - 1\right)100\% \Rightarrow$$

$$π(\%) = \left(\frac{100}{85} - 1\right)100\% \Rightarrow π(\%) = 17,65\%$$

Ερώτηση 4η

α.



Η γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μάζας m πριν την κρούση είναι $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ **(1)**.Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται σταθερή και για τη θέση απομάκρυνσης $x=+A\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχουμε: $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}k\frac{3A^2}{4}+\frac{1}{2}m\upsilon^2\Rightarrow\frac{kA^2}{4}=m\upsilon^2\overset{(1)}{\Rightarrow}\upsilon=\frac{\omega A}{2}$ **(2)**.

Κατά την πλαστική κρούση η ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\overset{+}{\underset{\rightarrow}{\Rightarrow}}m\upsilon-M\upsilon_0=(M+m)V_\sigma\underset{M=3m}{\overset{(2)}{\Rightarrow}}m\frac{\omega A}{2}-3m\upsilon_0=4mV_\sigma\Rightarrow V_\sigma=\frac{\omega A}{8}-\frac{3\upsilon_0}{4}\quad\textbf{(3)}$$

Μετά την κρούση η θέση ισορροπίας της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συσσωματώματος δεν μεταβάλλεται και η ενέργεια ταλάντωσής του διατηρείται σταθερή. Στη θέση απομάκρυνσης $x=+A\frac{\sqrt{3}}{2}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι V_σ:

$$\frac{1}{2}kA'^2=\frac{1}{2}k\frac{3A^2}{4}+\frac{1}{2}(M+m)V_\sigma^2\overset{M=3m}{\Rightarrow}A'^2=\frac{3A^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{4m}{k}V_\sigma^2\overset{(1)}{\Rightarrow}A'^2=\frac{3A^2}{4}+\frac{4V_\sigma^2}{\omega^2}\quad\textbf{(4)}$$

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος A' παραμένει ίσο με A, τότε από την **(4)** :

$$A^2=\frac{3A^2}{4}+\frac{4V_\sigma^2}{\omega^2}\Rightarrow\frac{A^2}{4}=\frac{4V_\sigma^2}{\omega^2}\Rightarrow V_\sigma=\pm\frac{\omega A}{4}\overset{(3)}{\Rightarrow}\begin{cases}\frac{\omega A}{8}-\frac{3\upsilon_{01}}{4}=\frac{\omega A}{4}\\ \frac{\omega A}{8}-\frac{3\upsilon_{01}}{4}=-\frac{\omega A}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\upsilon_{01}=-\frac{\omega A}{6}\ \text{η λύση απορρίπτεται διότι αντιστοιχεί σε ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα δεξιά}\\ \upsilon_{01}=\frac{\omega A}{2}\quad\textbf{(5)}\end{cases}$$

Από την σχέση **(4)** το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος A' γίνεται ελάχιστο, όταν V_σ=0.

Από την σχέση **(3)** : $\frac{\omega A}{8}-\frac{3\upsilon_{02}}{4}=0\Rightarrow\upsilon_{02}=\frac{\omega A}{6}$ **(6)**

Από την διαίρεση των **(5)** και **(6)**: $\frac{\upsilon_{01}}{\upsilon_{02}}=3$.