## Μια «οβιδιακή* μεταμόρφωση».
## Από την εξαναγκασμένη στην ελεύθερη αμείωτη αρμονική ταλάντωση

*Ο **Πόπλιος Οβίδιος Νάσων** (*Publius Ovidius Naso*, 20 Μαρτίου 43 π.Χ - 17μ.Χ), γνωστός ως **Οβίδιος**, ήταν Ρωμαίος ποιητής, που έζησε κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Οκταβιανού Αύγουστου. Ήταν σύγχρονος των γηραιότερων Βιργίλιου και Οράτιου, με τους οποίους συχνά κατατάσσεται ως ένας από τους τρεις κανονικούς ποιητές της λατινικής λογοτεχνίας και έζησε στην εποχή της «Pax Romana».

Είναι περισσότερο γνωστός από τις «*Μεταμορφώσεις*», μίας σειράς 15 βιβλίων μυθολογικής αφήγησης γραμμένης σε δακτυλικό εξάμετρο, καθώς και για τις συλλογές ερωτικής ποίησης σε ελεγειακά δίστιχα, και ιδιαίτερα για τους «*Έρωτες* (Amores)» και την «*Ερωτική τέχνη* (Ars amatoria)».Εξορίστηκε από τον Αύγουστο το 8μ.Χ στην πόλη Τόμι (στα αρχαιοελληνικά: Τόμις ή Τομεύς ή Τόμοι) της Μοισίας (Ρωμαϊκής επαρχίας του κάτω Δούναβη) σημερινή Κωνστάντζα, όπου και πέθανε μετά από οκτώ χρόνια το 17 μ.Χ. Η κατηγορία της εσχάτης προδοσίας δεν επιβλήθηκε από κανένα δικαστήριο, αλλά από το ιδιαίτερο δικαστήριο του Αυτοκράτορα και την απόφαση πήρε και ανακοίνωσε ο ίδιος ο αυτοκράτορας.

Γεννήθηκε στην πόλη Σουλμόνα το 43π.Χ και καταγόταν από εύπορη οικογένεια πατρικίων που για πολλές γενεές ανήκε στην τάξη των ιππέων. Σπούδασε ρητορική, νομικά και φιλολογία και επισκέφθηκε την Αθήνα, όπως συνήθιζαν οι νέοι των ανώτερων κοινωνικών τάξεων, αφού συνόδευσε σε ένα ταξίδι του εκεί τον Πομπήιο Μάγνο, και ταξίδεψε αρκετά στην Ελλάδα κερδίζοντας αρκετές εμπειρίες.

Στο έργο του «*Μεταμορφώσεις*», που θεωρείται το σπουδαιότερο και γράφτηκε περί το 1μ.Χ, αναφέρεται στις μεταμορφώσεις των ανθρώπινων όντων και είναι εμπνευσμένο από την Ελληνική μυθολογία. Το έργο διεσώθη από αντίγραφα που είχε δώσει σε φίλους του καθώς ο ίδιος το έκαψε, όταν πληροφορήθηκε για την εξορία του στις ακτές της Μαύρης Θάλασσας. Περιλαμβάνει μεταξύ άλλων τις διάσημες ιστορίες του Απόλλωνα και της Δάφνης, του Φαέθοντα, του Νάρκισσου, του Ερμαφρόδιτου, του Δαίδαλου, του Ορφέα και της Ευρυδίκης κ.ά

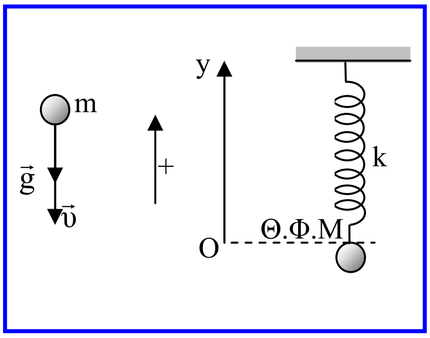
Στις «Μεταμορφώσεις» με θαυμαστό τρόπο περιγράφεται η ψυχική κατάσταση των ανθρώπων τη στιγμή που μεταμορφώνονται σε φυτό, ζώο ή πέτρα, ενώ τα ανθρώπινα συναισθήματα διατηρούνται. Σχεδόν όλες οι ιστορίες των ανθρώπινων μεταμορφώσεων είναι ερωτικές ιστορίες γεμάτες πάθος εμπλουτισμένες με μυθιστορηματικά στοιχεία.

Ο Οβίδιος ανήκει σε εκείνους τους λίγους ποιητές όλων των εποχών που το όνομα τους έγινε αιτία δημιουργίας ενός επιθέτου με οικουμενική χρήση. Ο Όμηρος μας έδωσε τους «ομηρικούς καβγάδες», ο Δάντης τη «δαντική κόλαση», και ο Οβίδιος τις «οβιδιακές μεταμορφώσεις».

Ο Π. Μπουκάλας ( 'Καθημερινή' 30-6-2009) γράφει «…Φοβάμαι πάντως ότι το ζεύγος «οβιδιακές μεταμορφώσεις» δεν έχει πάντοτε αυτόματο αντίκρισμα, αφού αρκετά συχνά ο Οβίδιος εννοείται σαν μεταμορφούμενος, κάπως σαν τον Πρωτέα, και όχι σαν αφηγητής μεταμορφώσεων. Τι φταίει; Δεν μπορώ να υιοθετήσω το γνωστό απαλλακτικό δόγμα «κανένα στόμα δεν το 'βρε και δεν το 'πε ακόμα», γιατί μάλλον τον ξέρουμε τον ένοχο κι είναι γνωστή η αιτία: είναι η στρεβλωμένη και στρεβλωτική παιδεία μας, που βέβαια δεν την εννοώ συμπιεσμένη στο σχήμα της θεσμικής εκπαίδευσης· είναι επίσης η κορφολογική μανία που μας σπρώχνει να υιοθετούμε ό,τι έχουμε απλώς ακουστά χωρίς να το ελέγχουμε. Και δεν ξέρω αν υπάρχει στο βάθος και κάποια υπεροψία, που μας πείθει ότι η λατινική γραμματεία είναι εξυπαρχής και μέχρι τέλους υποδεέστερη της αρχαιοελληνικής, ένα παρακολούθημα ή μίμημα, άρα είναι μη μεταφραστέα και μη αναγνωστέα.»

Από τους 12.000 στίχους του έργου έχουν μεταφραστεί περίπου 3.000 στίχοι στο βιβλίο του Ακαδημαϊκού και καθηγητή Λατινικής Φιλολογίας στο Αριστοτέλειο Θεόδωρου Δ. Παπαγγελή: «Σώματα που άλλαξαν τη θωριά τους. Διαδρομές στις *Μεταμορφώσεις* του Οβιδίου. Εκδόσεις Gutenberg, 2009, σελ. 295.Εκεί ο Θ. Παπαγγελής σημειώνει «ο Οβίδιος, ο «διασημότερος ατζέντης» της ελληνικής μυθολογίας».

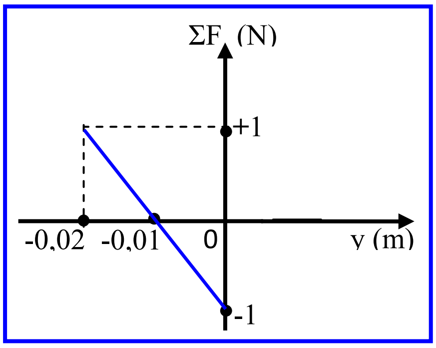
Σώμα μάζας m=0,1Kg αφήνεται από αρκετό ύψος και κινείται σε κατακόρυφη διεύθυνση μέσα στην ατμόσφαιρα προς το έδαφος. Το σώμα δέχεται δύναμη αντίστασης από τον αέρα της μορφής $\vec{F}=-b\vec{\upsilon}$ (b>0), όπου υ η στιγμιαία τιμή της ταχύτητας του σώματος και b η σταθερά απόσβεσης. Κάποια στιγμή που η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο υ =10m/s, ο ρυθμός αύξησης της ταχύτητας είναι $2m/s^2$. Η θετική φορά για τα διανυσματικά μεγέθη είναι προς τα πάνω.




**$A_1$.** Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς απόσβεσης b.

Προσδένουμε το σώμα στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να εκτελέσει το σύστημα μέσα στην ατμόσφαιρα ταλάντωση σταθερού πλάτους πρέπει να δεχθεί την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης $\vec{F}_{εξ}$ της μορφής $F_{εξ}=F_{0εξ}ημ(ωt+θ)$.

Η ταλάντωση που εκτελεί το σύστημα είναι ίδια με αυτή που θα εκτελούσε το σύστημα, χωρίς την αντίσταση του αέρα και την επίδραση της εξωτερικής δύναμης και σταθερά ταλάντωσης k. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της αριθμητικής (αλγεβρικής) τιμής της συνιστάμενης δύναμης σε συνάρτηση με την συντεταγμένη y της θέσης του σώματος στον κατακόρυφο άξονα Oy. Το σώμα τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (y=0). Η θετική φορά για την απομάκρυνση της ταλάντωσης είναι προς τα πάνω.




**$A_2$.** Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου και να γράψετε την έκφραση της συνισταμένης δύναμης σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη y της θέσης του σώματος.

**Β.** Να γράψετε την έκφραση της εξωτερικής περιοδικής δύναμης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

**Γ.** Να υπολογίσετε:

**$Γ_1$.** τη μέγιστη τιμή της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης και να σχολιάσετε τις τιμές τους.

**$Γ_2$.** το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή που η αλγεβρική τιμή της δύναμης του διεγέρτη είναι $F_{εξ}=-\dfrac{F_{0εξ}}{2}$ για πρώτη φορά, όπου $F_{0εξ}$= η μέγιστη τιμή (πλάτος) της εξωτερικής δύναμης ( δύναμης διέγερσης).

**Δ.** Αν η ενέργεια που προσφέρει η εξωτερική δύναμη διέγερσης σε κάθε περίοδο είναι $E_{εξ}=πbωA^2$ και η μέση ισχύς που αυτή προσφέρει είναι $\overline{P}_{F_{εξ}}=\dfrac{F^2_{0εξ}}{2b}συν^2φ$, όπου ω= η γωνιακή συχνότητα της εξωτερικής δύναμης διεγέρτης, A= το πλάτος της ταλάντωσης και φ= η διαφορά φάσης μεταξύ της εξωτερικής δύναμης διέγερσης και της ταχύτητας

**$Δ_1$.** να γράψετε τη σχέση που δίνει τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας ($\upsilon_{max}$) ως συνάρτηση μόνο των παραμέτρων b, $F_{0εξ}$ και φ της κίνησης.

**$Δ_2$.** να αποδείξετε ότι στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εξετάζουμε η τιμή της μέγιστης τιμής της ταχύτητας ($\upsilon_{max}$) είναι μέγιστη.

Δίνεται $g=10m/s^2$ και $\sqrt{10}=π$

## Απαντήσεις

**Α₁.**

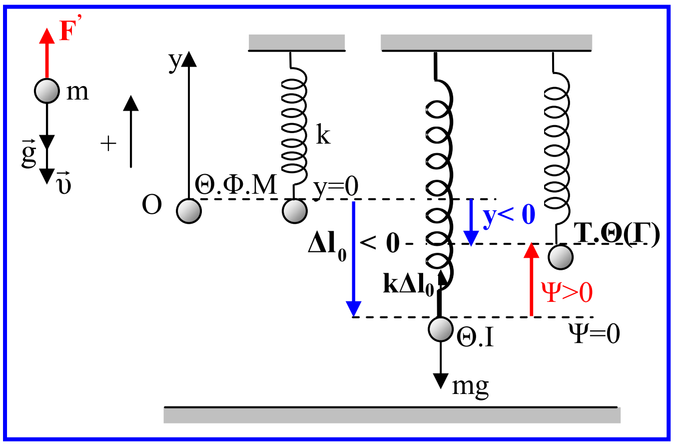
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}' + \vec{w} = m\vec{a} \overset{\uparrow +}{\Rightarrow} + b|\upsilon| - m|g| = -m\left|\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\right| \Rightarrow b\cdot 10 - 1 = -0,2 \Rightarrow$$

$$b = \frac{0,8}{10} \Rightarrow b = 0,08\frac{Kg}{s} \quad \textbf{(1)}$$

**Α₂.** Θ.Ι: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = \vec{0} \overset{\uparrow +}{\Rightarrow} -|mg| + |-k\Delta\ell_0| = 0 \Rightarrow -m|g| + k|-\Delta\ell_0| = 0 \Rightarrow |\Delta\ell_0| = \frac{m|g|}{k}$

Επειδή τη χρονική στιγμή t=0: υ=0, η Θ.Φ.Μ του ελατηρίου αποτελεί ακραία θέση της αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα και $\Psi_{max} = |\Delta\ell_0| = A \Rightarrow A = \frac{m|g|}{k}$ **(2)**.

Σε μία τυχαία θέση της τροχιάς (Γ), ο ταλαντωτής έχει συντεταγμένη θέσης y (y<0) η οποία αντιστοιχεί και στην παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση (Γ), απομάκρυνση Ψ από τη Θ.Ι της ταλάντωσης Ψ (Ψ>0) και η παραμόρφωση του ελατηρίου, όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι) είναι $\Delta\ell_0$ ($\Delta\ell_0$<0).




Θα επιχειρήσουμε να συνδέσουμε διανυσματικά τα προηγούμενα μεγέθη. Από το σχήμα φαίνεται ότι το διάνυσμα $\vec{y}$ αποτελεί τη συνισταμένη -άθροισμα- των διανυσμάτων $\vec{\Psi}$ και $\overrightarrow{\Delta\ell_0}$, άρα $\vec{y} = \overrightarrow{\Delta\ell_0} + \vec{\Psi}$ και για τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων $y = \Delta\ell_0 + \Psi \Rightarrow \Psi = y - \Delta\ell_0$ **(3).**

Καθώς το σώμα ταλαντώνεται από το 2ο Νόμο του Newton σε τυχαία θέση (Γ):

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = -m\omega^2\vec{\Psi}$ για τις αλγεβρικές τιμές των διανυσματικών μεγεθών:

$$\Sigma F = -m\omega^2\Psi \Rightarrow \Sigma F = -k\Psi \overset{(3)}{\Rightarrow} \Sigma F = -k(y - \Delta\ell_0) \Rightarrow \Sigma F = -ky + k\Delta\ell_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \Sigma F = -ky + k\frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -ky + mg \Rightarrow \Sigma F = -ky + 0,1(-10)$$

$\Rightarrow \Sigma F = -1 - ky$ **(4)** με $-\frac{m|g|}{k} - A \le y \le 0$ ή λόγω της **(2)** με $-2\frac{m|g|}{k} \le y \le 0$.

Από τις τιμές του διαγράμματος ΣF(y): y=−0,02m, ΣF=1N.

Με αντικατάσταση στην **(4)** : $1 = -1 - k(-0,02) \Rightarrow k = \frac{2}{0,02} \Rightarrow k = 100\frac{N}{m}$ **(5)**

Από την **(4)** $\overset{(5)}{\Rightarrow} \Sigma F = -1 - 100y \quad$ (S.I)

**Β.** Από τη σχέση **(2)** $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ A=0,01m **(6)**.

Όμως η αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα είναι ίδια με αυτή που θα εκτελούσε αν δεν επιδρούσαν σ' αυτό η δύναμη της αντίστασης του αέρα $\vec{F}$ και η εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ (δύναμη διέγερσης). Δηλαδή η συγκεκριμένη ταλάντωση προσομοιάζει (μεταμορφώνεται) σε ελεύθερη αμείωτη αρμονική ταλάντωση. Άρα σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει: $\vec{F}_{\varepsilon\xi} = -\vec{F}' = b\vec{\upsilon}$ **(7)**.

Επειδή η ταλάντωση είναι όμοια με την ελεύθερη αμείωτη αρμονική ταλάντωση η γωνιακή συχνότητά της ω, δηλαδή αυτή της εξωτερικής περιοδικής δύναμης, θα είναι ίδια με την ιδιοσυχνότητα $\omega_0$ του συστήματος, άρα $\omega = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10\sqrt{10} \Rightarrow \omega = 10\pi \dfrac{rad}{s}$ **(8)**.

Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας αντίστοιχα είναι:

$$\Psi = A\eta\mu(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Τη χρονική στιγμή t=0 η ταλάντωση αρχίζει, χωρίς να έχει ταχύτητα από τη Θ.Φ.Μ του ελατηρίου που είναι η πάνω ακραία της ταλάντωσης, Ψ=+Α, άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} rad$ και από **(6)**, **(8)** οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας αντίστοιχα γράφονται:

$\Psi = 0,01\eta\mu(10\pi t + \dfrac{\pi}{2})$ (S.I) **(9)**, $\upsilon = 0,1\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t + \dfrac{\pi}{2})$ (S.I) **(10)**.

Από**(7)** $\overset{(1)}{\underset{(10)}{\Rightarrow}} F_{\varepsilon\xi} = -(-0,08 \cdot 0,1\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t + \dfrac{\pi}{2})) \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = 0,008\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t + \dfrac{\pi}{2})$ **(11)**

ή $F_{\varepsilon\xi} = 0,008\pi\eta\mu(10\pi t + \pi)(S.I)$.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της εξαναγκασμένης αρμονικής ταλάντωσης που μελετάμε,η εξωτερική δύναμη διέγερσης είναι συμφασική με την ταχύτητα και προηγείται της απομάκρυνσης κατά $\dfrac{\pi}{2} rad$.

**Γ1.** $U_{max} = \dfrac{1}{2}DA^2 \Rightarrow U_{max} = \dfrac{1}{2}kA^2 \overset{(5)}{\underset{(6)}{\Rightarrow}} U_{max} = \dfrac{1}{2}100 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-3} J$

$K_{max} = \dfrac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \overset{(10)}{\Rightarrow} K_{max} = \dfrac{1}{2}10^{-1} \cdot 10^{-2}\pi^2 = 5 \cdot 10^{-3} J$

Δηλαδή $U_{max} = K_{max} = E$, διότι η ταλάντωση προσομοιάζει (μεταμορφώνεται) σε ελεύθερη αμείωτη αρμονική ταλάντωση όπου η ενέργεια διατηρείται σταθερή. Εδώ η εξωτερική δύναμη προσφέρει ενέργεια **κάθε χρονική στιγμή** με τον ίδιο ρυθμό που η δύναμη απόσβεσης την καταναλώνει ( εκτός των χρονικών στιγμών που μηδενίζεται η ταχύτητα), πράγματι:

$P_{F\varepsilon\xi} = F_{\varepsilon\xi}\upsilon \overset{(7)}{\Rightarrow} P_{F\varepsilon\xi} = -F'\upsilon \Rightarrow P_{F\varepsilon\xi} = P_{F'}$

**Γ2.**Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας υπολογίζεται ως ο αντίθετος του ρυθμού εκτέλεσης έργου της συντηρητικής δύναμης επαναφοράς:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta W_{F\varepsilon\pi}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -F_{\varepsilon\pi}\upsilon \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -(-k\Psi)\upsilon \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = k\Psi\upsilon$$

$$\overset{(5)}{\underset{(9),(10)}{\Rightarrow}} \frac{\Delta U}{\Delta t} = 100 \cdot \left[0,01\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2})\right]\left[0,1\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{\pi}{2})\right] \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = 0,05\eta\mu(20\pi t + \pi) \Rightarrow$$

$\dfrac{\Delta U}{\Delta t} = -0,05\eta\mu(20\pi t)$ (S.I) **(12)**.

Από τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} - \frac{\Delta U}{\Delta t} \overset{\frac{\Delta E}{\Delta t}=0}{\Rightarrow} \frac{\Delta K}{\Delta t} = -\frac{\Delta U}{\Delta t} \overset{(13)}{\Rightarrow} \frac{\Delta K}{\Delta t} = 0,05\eta\mu(20\pi t)(S.I) \quad \textbf{(13)}.$$

Όταν,

$$F_{\varepsilon\xi} = -\frac{F_{0\varepsilon\xi}}{2} \overset{(11)}{\Rightarrow} 0,008\sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) = -0,004 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 10\pi t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 10\pi t = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow 20\pi t = 4\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad :$$

$$20\pi t = 4\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \overset{\kappa=0}{\Rightarrow} t = \frac{1}{60}s \quad \text{και } 20\pi t = 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \overset{\kappa=0}{\Rightarrow} t < 0 \ \text{ ή } \ 20\pi t = 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \overset{\kappa=1}{\Rightarrow} t = \frac{11}{60}s$$

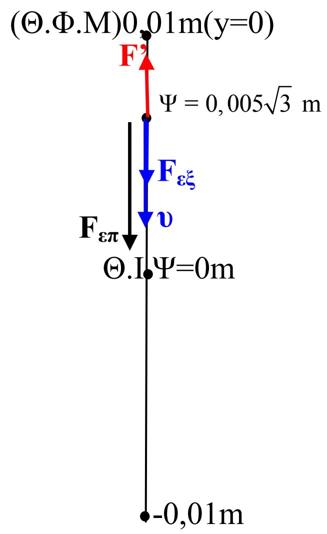
Προφανώς η πρώτη φορά που $F_{\varepsilon\xi} = -\frac{F_{0\varepsilon\xi}}{2}$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{60}s$.

Με αντικατάσταση στις **(12)** και **(13)** αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -0,025\sqrt{3}\,\frac{J}{s} \ \text{ και } \ \frac{\Delta K}{\Delta t} = 0,025\sqrt{3}\,\frac{J}{s}.$$

Δηλαδή, η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται και η κινητική του ενέργεια αυξάνεται, άρα το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας του. Με αντικατάσταση στις **(9)** και **(10)** αντίστοιχα έχουμε: $\Psi = 0,005\sqrt{3}\ m$ και $\upsilon = -0,05\pi\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$, άρα το σώμα βρίσκεται σε θέση θετικής απομάκρυνσης και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η απομάκρυνση, η ταχύτητα και οι δυνάμεις που επιδρούν στο σώμα τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{60}s$ :




**Δ₁.**

Η μέση ισχύς της εξωτερικής δύναμης διέγερσης ορίζεται ως το πηλίκο της ενέργειας που αυτή προσφέρει μέσω του έργου της σε χρόνο μιας περιόδου:

$$\overline{P}_{F_{\varepsilon\xi}} = \frac{E_{\varepsilon\xi}}{T} \Rightarrow \frac{F^2_{0\,\varepsilon\xi}}{2b}\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{\pi b\omega A^2}{T} \Rightarrow \frac{F^2_{0\,\varepsilon\xi}}{2b}\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{\pi b\omega^2 A^2}{2\pi} \Rightarrow F^2_{0\,\varepsilon\xi}\sigma\upsilon\nu^2\varphi = b^2\omega^2 A^2 \Rightarrow F_{0\,\varepsilon\xi}\sigma\upsilon\nu\varphi = b\omega A$$

$$\Rightarrow F_{0\,\varepsilon\xi}\sigma\upsilon\nu\varphi = b\upsilon_{max} \Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{F_{0\,\varepsilon\xi}}{b}\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \mathbf{(14)}.$$

**Δ₂.** Από την **(14)** προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας γίνεται μέγιστη, όταν $\sigma\upsilon\nu\varphi = 1$ δηλαδή $\varphi = 0$ rad και είναι $(\upsilon_{max})_{max} = \frac{F_{0\,\varepsilon\xi}}{b}$.Στην περίπτωση της ταλάντωσης που εξετάζουμε, όπως προκύπτει από τις **(10)** και **(11)**, η διαφορά φάσης μεταξύ της εξωτερικής δύναμης διέγερσης και της ταχύτητας είναι $\varphi = 0$ rad, και η $\upsilon_{max}$ είναι μέγιστη:

$$(\upsilon_{max})_{max} \underset{(11)}{\overset{(1)}{=}} \frac{0,008\pi}{0,08} \Rightarrow (\upsilon_{max})_{max} = 0,1\pi\,\frac{m}{s}$$

Δηλαδή, όταν η εξωτερική δύναμη και η ταχύτητα είναι συμφασικές και παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$ rad με την απομάκρυνση:

**α.** η μέγιστη ταχύτητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι μέγιστη και

**β.** η ισχύς που προσφέρει η εξωτερική δύναμη διέγερσης και προσλαμβάνει ο ταλαντωτής είναι επίσης μέγιστη.

Όλα αυτά προϋποθέτουν την προσομοίωση (μεταμόρφωση) της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε ελεύθερη αμείωτη αρμονική, δηλαδή την ικανοποίηση της συνθήκης $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

**Σχόλια**

**1.** Στο ερώτημα **$A_1$** υπενθυμίζεται η σημασία του 2[ου] Νόμου ο οποίος διέπει κάθε ειδική περίπτωση κίνησης και γίνεται εξ αρχής χρήση μέτρων των διανυσματικών μεγεθών που δηλώνονται από το αντίστοιχο σύμβολο της απόλυτης τιμής τους καθώς και της θετικής φοράς που έχει ορισθεί.

**2.** Στο ερώτημα **$A_2$** γίνεται χρήση των μέτρων και της θετικής φοράς για τον υπολογισμό της **απόστασης** $|\Delta\ell_0|$ που απέχει η θέση ισορροπίας (Θ.Ι) από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (Θ.Φ.Μ) που αποτελεί και το πλάτος της ταλάντωσης. Στη συνέχεια γίνεται χρήση διανυσμάτων και τέλος αλγεβρικών τιμών ως εναλλακτικός τρόπος εργασίας, αλλά και για να αξιοποιηθεί το διάγραμμα $F_{εξ}-y$ που συσχετίζει αριθμητικές (αλγεβρικές) τιμές των μεγεθών. Σκόπιμα επιλέχθηκε η τυχαία θέση να είναι θέση αρνητικής απομάκρυνσης της ταλάντωσης.
Για να υπολογίσουμε την σταθερά του ελατηρίου k αντικαταστήσαμε στην **(4)** τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών. Συμπερασματικά, πέρα από το σημειολογικό του πράγματος, δηλαδή αν στο σύμβολο ενός φυσικού μεγέθους αντιστοιχίζουμε το μέτρο ή την αριθμητική τιμή, οι αριθμητικές τιμές αργά ή γρήγορα «θα μας ζητήσουν το πρόσημό τους».

**3.**Στο **B** ερώτημα αναδεικνύονται οι προϋποθέσεις για την μεταμόρφωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε ελεύθερη αμείωτη ταλάντωση που συνδέονται με όσα διαπραγματεύονται τα επόμενα ερωτήματα.

**4.**Στο **$Γ_1$** ερώτημα η ισότητα των μέγιστων τιμών δυναμικής και κινητικής ενέργειας συσχετίζεται με τη σχέση των ισχύων εξωτερικής δύναμης διέγερσης και δύναμης αποσβέσεων, είναι αντίθετες κάθε χρονική στιγμή ( εκτός των χρονικών στιγμών που μηδενίζεται η ταχύτητα).

**5.** Στο **$Γ_2$** ερώτημα φαίνεται η ταύτιση της συμπεριφοράς της εξαναγκασμένης αρμονικής ταλάντωσης με την ελεύθερη αρμονική αμείωτη, όταν $\omega=\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, δηλαδή η διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης, κάτι που δεν συμβαίνει στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, αλλά μόνο στη συγκεκριμένη περίπτωση. Στο ενδεχόμενο ερώτημα είναι ίδιες δύο ταλαντώσεις, όταν στη μια δεν υπάρχουν οι δυνάμεις διέγερσης και απόσβεσης και στην άλλη υπάρχουν, αλλά έχουν συνισταμένη μηδέν;
Η απάντηση είναι ότι εκ του αποτελέσματος είναι ίδιες, νομίζω ότι εδώ το ρήμα προσομοιάζει (η μια στην άλλη) βάζει τα πράγματα στη θέση τους. Όλοι οι άνθρωποι που έχουν μάζα m=75Kg δεν είναι ίδιοι, αν όμως έχουν την ίδια ταχύτητα, θα έχουν και την ίδια ορμή.

**6.**Στο **$Δ_1$** ερώτημα δίνονται η ενέργεια που προφέρει η εξωτερική δύναμη διέγερσης και η έκφραση της μέσης ισχύος της. Ζητείται η κατανόηση του ορισμού της μέσης ισχύος και η εξαγωγή μιας ενδιαφέρουσας σχέσης, αυτής της μέγιστης ταχύτητας, χωρίς να υποχρεώνεται ο μαθητής να περάσει από τη μαθηματική «βάσανο» του υπολογισμού της ενέργειας που προσφέρει η εξωτερική δύναμη διέγερσης σε **κάθε περίοδο (και όχι ανά περίοδο)** και της μέσης ισχύος της από την έκφραση της στιγμιαίας ισχύος. Εκείνο που ενδιαφέρει είναι η αξιοποίηση της σχέσης αυτής για την ερμηνεία των όσων συμβαίνουν σ' αυτή την περίπτωση εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

**7.** Στο **$Δ_2$** ερώτημα αναδεικνύεται η μεγιστοποίηση της μέγιστης ταχύτητας , όταν $\omega=\omega_0$ καθώς και η μεγιστοποίηση της μέσης ισχύος, όταν η ταχύτητα και η εξωτερική δύναμη διέγερσης είναι συμφασικές. Αποφεύχθηκε επιμελώς η οποιαδήποτε αναφορά σε **συντονισμό ταχύτητας ή ενέργειας** για να μην προκληθεί σύγχυση στον μαθητή − αναγνώστη.
Σε αντιδιαστολή με το εισαγωγικό σημείωμα η «μεταμόρφωση» της εξαναγκασμένης αρμονικής ταλάντωσης σε ελεύθερη αμείωτη αρμονική ταλάντωση δεν είναι μύθος, είναι πραγματικότητα.

**Ξ. Στεργιάδης**