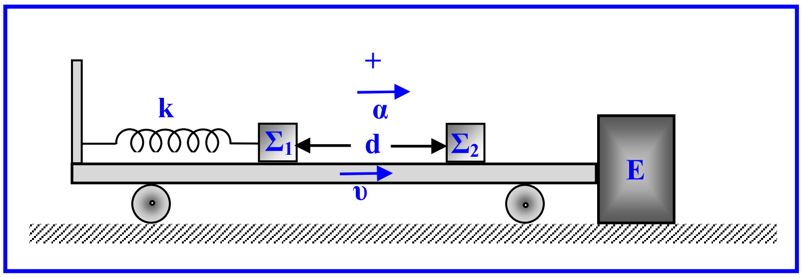
Ελάχιστα και μέγιστα σε μια αρμονική ταλάντωση

Θέμα 1ο



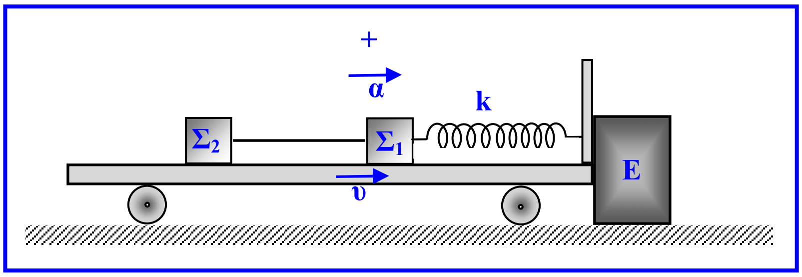
Το βαγόνι του σχήματος έχει αρκετά μεγάλο μήκος και κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α=80m/s^2, πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο, όταν τη χρονική στιγμή t=0 συγκρούεται με ακλόνητο εμπόδιο Ε με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 4\sqrt{6}\,\text{m/s}$ και κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα και το βαγόνι αμέσως (ακαριαία) προσκολλάται στο εμπόδιο και ακινητοποιείται. Το οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=400 N/m είναι στο ένα άκρο του συνδεδεμένο με σώμα Σ_1 μάζας m_1=2Kg ενώ το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο στο βαγόνι. Σε απόσταση d από το σώμα Σ_1 και πάνω στο βαγόνι βρίσκεται σώμα Σ_2 μάζας m_2=2Kg. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 είναι ακίνητα ως προς το βαγόνι και κατά την κρούση τα σώματα δεν αναπηδούν. Το σώμα Σ_1 δεν παρουσιάζει τριβή με το βαγόνι ενώ το Σ_2 παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ_S=μ=2,7.

α. Να εξηγήσετε το είδος της παραμόρφωσης του ελατηρίου (επιμήκυνση ή συσπείρωση) και να υπολογίσετε την τιμή της ακριβώς πριν την κρούση.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ_1 μετά από την κρούση βαγονιού και εμποδίου Ε.

γ. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της απόστασης d για την οποία τα σώματα δεν συγκρούονται. Δίνονται π=3,14 και $\sqrt{6} = 2,45$, $\sqrt{3} = 1,73$, π^2=10, g=10m/s^2 η θετική φορά για την απομάκρυνση της αρμονικής ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι προς τα δεξιά.

Θέμα 2ο



Το βαγόνι του σχήματος έχει μάζα Μ αρκετά μεγάλο μήκος και κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α_0 με κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο, όταν συγκρούεται με ακλόνητο εμπόδιο Ε. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα και το βαγόνι αμέσως (ακαριαία) προσκολλάται στο εμπόδιο και ακινητοποιείται. Το οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=800 N/m είναι στο ένα άκρο του συνδεδεμένο με σώμα Σ_1 μάζας m_1=1Kg ενώ το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο στο βαγόνι. Το σώμα Σ_1 είναι συνδεδεμένο με το σώμα Σ_2 μάζας m_2=1Kg με αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο είναι τεντωμένο και έχει όριο θραύσης $T_{\theta\rho}$=80N. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 είναι ακίνητα ως προς το βαγόνι, δεν παρουσιάζουν τριβές με αυτό και κατά την κρούση δεν αναπηδούν.

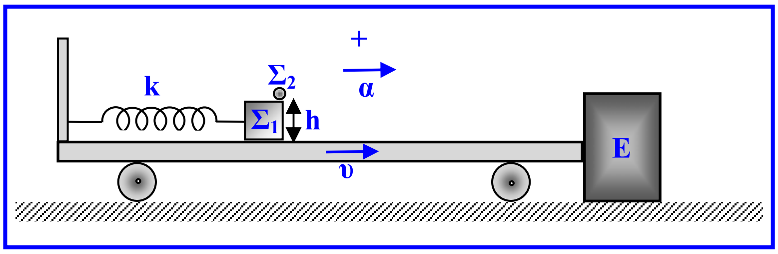
α. Να δείξετε ότι το σύστημα ελατήριο -σώμα Σ_1- σώμα Σ_2 μετά την κρούση εκτελεί αρμονική ταλάντωση στη διάρκεια της οποίας η μεγαλύτερη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης είναι α_0. Η θετική φορά για την απομάκρυνση της αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος είναι προς τα δεξιά.

β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης α_0 του βαγονιού πριν την κρούση, ώστε το σύστημα ελατήριο - σώμα Σ_1- σώμα Σ_2 να εκτελεί αρμονική ταλάντωση μετά την κρούση.

γ. Αν το μέτρο της επιτάχυνσης του βαγονιού πριν την κρούση του με το εμπόδιο είναι α_0=40m/s^2 και η ταχύτητά του έχει μέτρο $\upsilon = 2\sqrt{6}\,\text{m/s}$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του συστήματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του θεωρώντας ως αρχή του χρόνου (t=0) τη στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση του συστήματος. Στο διάγραμμα να φαίνεται και η τιμή της επιτάχυνσης πριν την κρούση του βαγονιού με το εμπόδιο Ε.

δ. Αν το μέτρο της σταθερής επιτάχυνσης του βαγονιού, πριν την κρούση του με το εμπόδιο Ε, ήταν α_0=40m/s^2, ποιά η ελάχιστη τιμή του ορίου θραύσης $T_{\theta\rho}$, ώστε το σύστημα ελατήριο - σώμα Σ_1- σώμα Σ_2 να εκτελεί αρμονική ταλάντωση μετά την κρούση;

Θέμα 3ο



Το βαγόνι του σχήματος έχει αρκετά μεγάλο μήκος και κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha=40m/s^2$ και ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 2\sqrt{5}\ m/s$ με κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο, όταν συγκρούεται με ακίνητο εμπόδιο Ε. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα και το βαγόνι αμέσως (ακαριαία) προσκολλάται στο εμπόδιο και ακινητοποιείται. Το οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=400 N/m είναι στο ένα άκρο του συνδεδεμένο με σώμα Σ_1 μάζας m_1=1Kg και σχήματος κύβου ακμής h, ενώ το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο στο βαγόνι. Στην άκρη της πάνω έδρας του σώματος Σ_1 υπάρχει μικρό κομμάτι πηλού Σ_2 μάζας m_2=1Kg.Ο κύβος και ο πηλός είναι ακίνητοι ως προς το βαγόνι, ο κύβος Σ_1 δεν παρουσιάζει τριβές με το βαγόνι και τα σώματα δεν αναπηδούν κατά την κρούση. Μετά την κρούση ο πηλός αποχωρίζεται από τον κύβο και προσκολλάται στο βαγόνι.

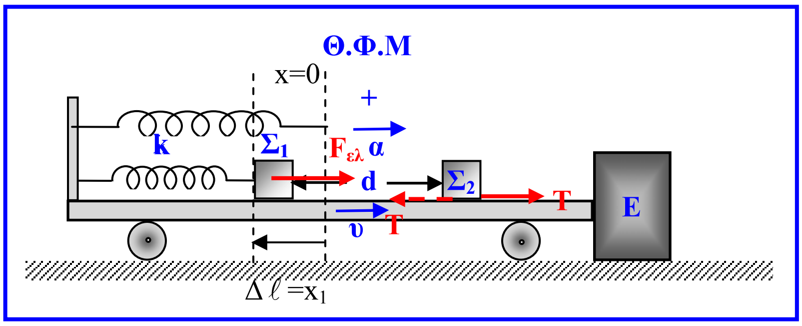
α. Να εξηγήσετε το είδος της παραμόρφωσης του ελατηρίου (επιμήκυνση ή συσπείρωση) και να υπολογίσετε την τιμή της ακριβώς πριν την κρούση.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα ελατήριο – κύβος Σ_1 μετά την κρούση βαγονιού – σώματος Σ.

γ. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της ακμής h του κύβου Σ_1, ώστε αυτός να μη συγκρούεται με τον πηλό Σ_2.Δίνεται $g=10m/s^2$, η θετική φορά για την απομάκρυνση της αρμονικής ταλάντωσης του κύβου Σ_1 είναι προς τα δεξιά και οι αντιστάσεις του αέρα αμελούνται.

Απαντήσεις

Θέμα 1ο



α. Η μοναδική δύναμη που επιδρά στο σώμα Σ_1 στην οριζόντια διεύθυνση κίνησης του βαγονιού είναι η δύναμη από το ελατήριο, επειδή το σώμα Σ_1 κινείται λίγο πριν την κρούση με την σταθερή επιτάχυνση του βαγονιού που έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, θα έχει την ίδια κατεύθυνση, επομένως το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο. Από τον 2ο Νόμο του Newton για το σώμα Σ_1:

$$\Sigma\vec{F} = m_1\vec{\alpha} \Rightarrow k\Delta\ell = m_1\alpha \Rightarrow \Delta\ell = \frac{m_1\alpha}{k} \Rightarrow \Delta\ell = 0,4m \ \mathbf{(1)}$$

β. Αμέσως μετά την κρούση και την ακινητοποίηση του βαγονιού το σύστημα ελατήριο – σώμα Σ_1 εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά D=k.Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται σταθερή και το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα υ, όταν απέχει $x_1 = \Delta\ell \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 = 0,4m$ από τη θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου):

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_1^2 + \frac{m_1\upsilon^2}{k}} \Rightarrow A = 0,8m \ \mathbf{(2)}$$

γ. Η ταλάντωση του σώματος Σ_1 αρχίζει από τη θέση x_1=-0,4m με ταχύτητα $\upsilon=4\sqrt{6}$ m/s.Από την εξίσωση της απομάκρυνσης $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ και την **(2)** για t=0 έχουμε: $-0,4=0,8\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$

$$\eta\mu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 0 \le \varphi_0 < 2\pi \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_0 = \frac{7\pi}{6}\,\text{rad} \\ \varphi_0 = \frac{11\pi}{6}\,\text{rad} \end{Bmatrix}$$.Όμως για t=0 $\upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\,\varphi_0$ και υ>0,

άρα $\varphi_0 = \frac{11\pi}{6}\,\text{rad}$ και $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 10\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$x=0{,}8\eta\mu(10\sqrt{2}t + \frac{11\pi}{6})$ (S.I) **(3)**.

Για να μη συγκρουστεί το σώμα Σ_1 με το σώμα Σ_2 πρέπει η απόσταση που θα διανύσει το σώμα Σ_1 μέχρι να φθάσει στη θέση μέγιστης ακραίας θετικής απομάκρυνσης x=+0,4m, που είναι $|x_1| + A = \Delta l + A \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} 1{,}2\text{m}$ να είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα της αρχικής απόστασης d των δύο σωμάτων και της απόστασης $s_2 = \upsilon t_1 - \frac{1}{2}\mu g t_1^2$ (μετά την κρούση η φορά της Τ γίνεται αντίθετη καθώς προσπαθεί να εμποδίσει την ολίσθηση του σώματος Σ_2 πάνω στο βαγόνι, η επιτάχυνση που αυτή προσδίδει στο σώμα είναι $\alpha_2 = -\mu g$) που διανύει το σώμα Σ_2 στο χρόνο t_1 που το σώμα Σ_1 χρειάζεται για να φθάσει για πρώτη φορά στη θέση μέγιστης ακραίας θετικής απομάκρυνσης x=+0,8m, $d+s_2 = d + \upsilon t_1 - \frac{1}{2}\mu g t_1^2$,δηλαδή η συνθήκη μη σύγκρουσης είναι:

$$\Delta l + A \le d + s_2 \Rightarrow 1{,}2 \le d + 4\sqrt{6}t_1 - \frac{1}{2}2{,}7\cdot 10 t_1^2 \ \textbf{(4)}.$$

Ο υπολογισμός του χρόνου t_1 γίνεται από την **(3)**:

$$0{,}8 = 0{,}8\eta\mu(10\sqrt{2}\,t_1 + \frac{11\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(10\sqrt{2}\,t_1 + \frac{11\pi}{6}) = 1 \Rightarrow 10\sqrt{2}\,t_1 + \frac{11\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \kappa = 0 \Rightarrow t_1 < 0 \\ \kappa = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{30}\,\text{s} \ \textbf{(5)} \end{Bmatrix}$$

Από **(4)** και **(5)** : $d \ge 0{,}052\text{m}$, άρα d_{min}=0,052m=5,2cm.

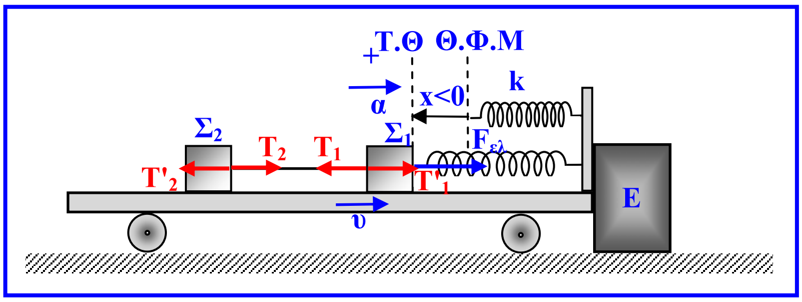
Θέμα 2ο

α. Πριν από την κρούση βαγονιού – εμποδίου το σώμα Σ_2 επιταχύνεται προς τα δεξιά, άρα η δύναμη T_2 που δέχεται από το νήμα έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά. Επειδή το νήμα είναι αβαρές: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$ **(1)** και $\vec{T}_1 = -\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2 = -\vec{T}_2'$. Άρα η δύναμη T_1 έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και επειδή το σώμα Σ_1 επιταχύνεται προς τα δεξιά πρέπει η δύναμη από το ελατήριο $F_{\varepsilon\lambda}$ να έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά. Δηλαδή το ελατήριο είναι επιμηκυμένο και το σύστημα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας του που είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Σε μια τυχαία θέση οι δυνάμεις που επιδρούν στο σύστημα είναι όπως στο σχήμα:

$$\Sigma F = \cancel{T_2} - \cancel{T_2'} - \cancel{T_1} + \cancel{T_1'} + F_{\varepsilon\lambda} \overset{(1)}{\Rightarrow} \Sigma F = -k|x|$$

,άρα το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά ταλάντωσης $D=k=(m_1+m_2)\omega^2$ και η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση $\alpha=-\omega^2 x$ **(2)**.



Η ταλάντωση του συστήματος διαρκεί μέχρι το σώμα Σ_1 να φθάσει στη θέση φυσικού μήκους (x=0) όπου από τη σχέση **(2)** προκύπτει ότι α=0, αμέσως μετά το σώμα Σ_1 επιβραδύνεται ενώ στο σώμα Σ_2 δεν υπάρχει κατάλληλη δύναμη για να το επιβραδύνει, αφού η T_2 δεν μπορεί να ωθεί το σώμα Σ_2, με αποτέλεσμα το νήμα να χαλαρώνει και το σώμα $Σ_2$ να μην συμμετέχει στην ταλάντωση. Άρα το μέτρο της επιτάχυνσης έχει ως μέγιστη τιμή την $α_0$ καθώς στη συνέχεια και για το χρονικό διάστημα που διαρκεί η ταλάντωση, η τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης ελαττώνεται.

β. Για να εκτελεί ταλάντωση το σύστημα σώμα $Σ_1$– ελατήριο –σώμα $Σ_2$ αμέσως μετά την ακινητοποίηση του βαγονιού πρέπει να μη σπάσει το νήμα. Η συνθήκη για να μη συμβεί αυτό είναι $T_2 \le T_{θρ}$ **(3)**

Από το 2[ο] Νόμο του Newton για το σώμα $Σ_2$ έχουμε:

$$ΣF = m_2 α_0 \Rightarrow T_2 = m_2 α_0 \overset{(3)}{\Rightarrow} m_2 α_0 \le T_{θρ} \Rightarrow α_0 \le \frac{T_{θρ}}{m_2} \Rightarrow α_{0\,max} = \frac{T_{θρ}}{m_2} \Rightarrow α_{0\,max} = 80\frac{m}{s^2}$$

γ. Από τη σχέση **(2)** βρίσκουμε την απομάκρυνση της αρμονικής ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t=0:

$$α_0 = -\frac{k}{m_1 + m_2}x \Rightarrow x = -\frac{α_0(m_1 + m_2)}{k} \Rightarrow x = -0,1\text{m} \ \mathbf{(4)}.$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται σταθερή και το σύστημα έχει ταχύτητα υ, όταν απέχει $x_1 = Δ\ell \overset{(4)}{\Rightarrow} x_1 = 0,1\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου):

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_1^2 + \frac{m_1υ^2}{k}} \Rightarrow A = 0,2\text{m} \ \mathbf{(2)}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow ω = 20\frac{rad}{s}$

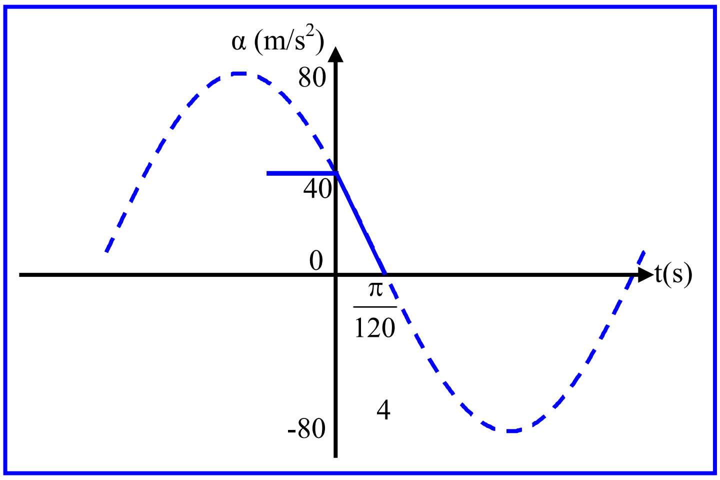
Η ταλάντωση του σώματος $Σ_1$ αρχίζει από τη θέση x_1=-0,1m με ταχύτητα υ=$2\sqrt{6}$ m/s.Από την εξίσωση της απομάκρυνσης x=Αημ(ωt+$φ_0$) και την **(2)** για t=0 έχουμε: -0,1=0,2ημ$φ_0 \Rightarrow$

$$ημφ_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} φ_0 = 2κπ + \frac{7π}{6} \\ 0 \le φ_0 < 2π \\ φ_0 = 2κπ - \frac{π}{6} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} φ_0 = \frac{7π}{6}\text{rad} \\ φ_0 = \frac{11π}{6}\text{rad} \end{Bmatrix}$$.Όμως για t=0 υ=$υ_{max}$συν$φ_0$ και υ>0,

άρα $φ_0 = \frac{11π}{6}$rad .Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι : x=0,2ημ($20t + \frac{11π}{6}$) (S.I) και της επιτάχυνσης: α=-80ημ($20t + \frac{11π}{6}$) (S.I) με $0 \le t \le t_1$, όπου t_1= η χρονική στιγμή που το σώμα $Σ_1$ περνάει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας και έχει ταχύτητα υ>0. Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1:

$$0 = 0,2ημ(20t_1 + \frac{11π}{6}) \Rightarrow ημ(20t_1 + \frac{11π}{6}) = 0 \Rightarrow 20t_1 + \frac{11π}{6} = 2κπ \Rightarrow \begin{Bmatrix} κ = 0 \Rightarrow t_1 < 0 \\ κ = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{π}{120}s \end{Bmatrix}$$

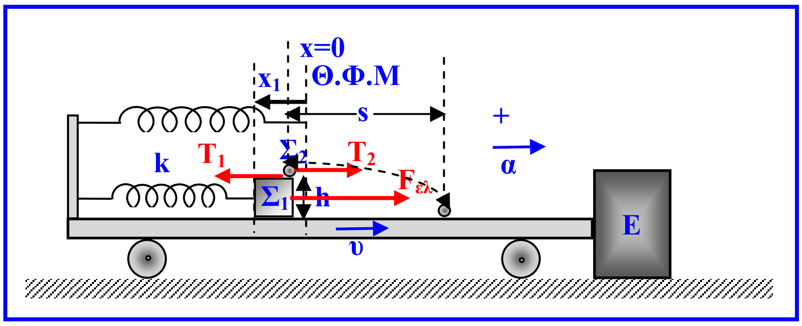
Η γραφική παράσταση α-t είναι όπως οι συνεχείς γραμμές στο επόμενο διάγραμμα:



δ. Από το 2^o Νόμο του Newton για το σώμα Σ_2 έχουμε:

$$\Sigma F = m_2\alpha_0 \Rightarrow T_2 = m_2\alpha_0 \overset{(3)}{\Rightarrow} m_2\alpha_0 \le T_{\theta\rho} \Rightarrow T_{\theta\rho\,min} = 40N$$

Θέμα 3ο



α. Η μοναδική δύναμη που επιδρά στον πηλό Σ_2 είναι η στατική τριβή T_2 η οποία έχει την κατεύθυνση της επιτάχυνσης, δηλαδή προς τα δεξιά. Στον κύβο Σ_1 επιδρούν η T_1, που είναι η αντίδραση της T_2 με κατεύθυνση προς τα αριστερά $\left(\vec{T}_1 = -\vec{T}_2\right)$ και η δύναμη από το ελατήριο $F_{\varepsilon\lambda}$. Επειδή ο κύβος επιταχύνεται με κατεύθυνση προς τα δεξιά η δύναμη του ελατηρίου πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, άρα το ελατήριο είναι συσπειρωμένο και το σύστημα κινείται προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Από το 2^o Νόμο του Newton για το σώμα Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma F = m_1\alpha \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - T_1 = m_1\alpha \;\textbf{(1)}$$

Από το 2^o Νόμο του Newton για το σώμα Σ_2 έχουμε:

$$\Sigma F = m_2\alpha \Rightarrow T_2 = m_2\alpha \;\textbf{(2)}$$

Από την άθροιση των **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda} - \cancel{T_1} + \cancel{T_2} = (m_1+m_2)\alpha \Rightarrow k\Delta\ell = (m_1+m_2)\alpha \Rightarrow \Delta\ell = \frac{(m_1+m_2)\alpha}{k} \Rightarrow \Delta\ell = 0,2m \;\textbf{(3)}$$

β. Αμέσως μετά την κρούση και την ακινητοποίηση του βαγονιού το σύστημα ελατήριο –κύβος Σ_1 εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά D=k.Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται σταθερή και ο κύβος έχει ταχύτητα υ, όταν απέχει $x_1 = \Delta\ell \overset{(3)}{\Rightarrow} x_1 = 0,2m$ από τη θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου):

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_1^2 + \frac{m_1\upsilon^2}{k}} \Rightarrow A = 0,3m \;\textbf{(4)}$$

γ. Μετά την κρούση ο πηλός Σ_2 εκτελεί οριζόντια βολή με ταχύτητα μέτρου υ από ύψος h από το βαγόνι. Ο χρόνος κίνησης του πηλού είναι: $t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ και το βεληνεκές s της οριζόντιας βολής είναι: $s = \upsilon\sqrt{\frac{2h}{g}}$ **(5)**.

Για να μη συγκρουστεί ο κύβος με τον πηλό θα πρέπει όταν αυτός βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης της ταλάντωσής του (x=+A=+0,3m) να ισχύει:

$$\Delta\ell + A \le s \overset{(5)}{\Rightarrow} \Delta\ell + A \le \upsilon\sqrt{\frac{2h}{g}} \overset{(3),(4)}{\Rightarrow} 0,2+0,3 \le 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{2h}{10}} \Rightarrow h \ge 6,25\cdot 10^{-2}m \Rightarrow h_{min} = 6,25cm$$

Σημείωση:

Σε όλες τις εφαρμογές οι ταχύτητες έχουν υπολογιστεί ως προς το έδαφος (σύστημα αναφοράς του ακίνητου παρατηρητή). Η πρόσκρουση και προσκόλληση στο εμπόδιο επελέγη ως ένας τρόπος απότομης ακινητοποίησης του βαγονιού.