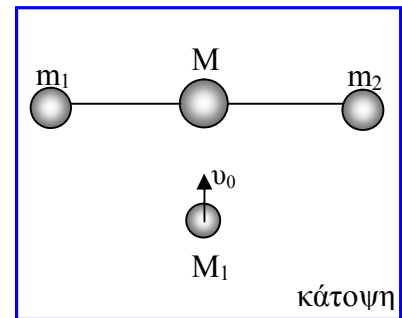


ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΣΦΑΙΡΩΝ

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ισορροπεί ένα σύστημα που αποτελείται από τρία μικρά σφαιρίδια με μάζες $m_1=m_2=0,5\text{Kg}$ και $M=4\text{Kg}$. Τα σφαιρίδια μαζών m_1 και m_2 συνδέονται με το σφαιρίδιο μάζας M με όμοια αβαρή και μη εκτατά νήματα του ίδιου μήκους τα οποία είναι τεντωμένα. Ένα τέταρτο σφαιρίδιο μάζας $M_1=2\text{Kg}$ κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_0=3\text{m/s}$ και συγκρούεται με το σφαιρίδιο μάζας M . Η κρούση είναι κεντρική και τελείως ελαστική. Το σφαιρίδιο μάζας M_1 μετά την κρούση απομακρύνεται.



α. Να υπολογιστούν τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιριδίων μαζών M και M_1 αμέσως μετά την κρούση τους.

β. Να εξηγήσετε γιατί οι ταχύτητες των σφαιριδίων μαζών m_1 και m_2 , αμέσως μετά την κρούση των σφαιριδίων μαζών M και M_1 και μέχρι αυτά να συγκρουστούν μεταξύ τους, έχουν διαρκώς ίσα μέτρα.

γ. Να υπολογιστούν τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιριδίων m_1 , m_2 και M τη χρονική στιγμή που τα σφαιρίδια μαζών m_1 και m_2 συγκρούονται, αν η κρούση τους είναι τελείως ελαστική.

ΛΥΣΗ

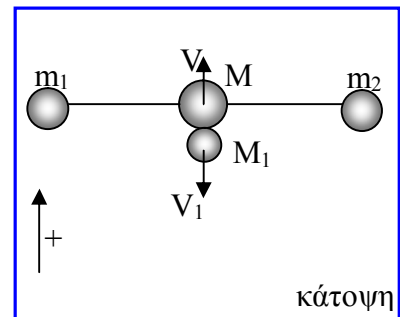
α. Για την κεντρική και τελείως ελαστική κρούση των σφαιριδίων M - M_1 έχουμε ότι διατηρείται η ορμή του συστήματος και η κινητική του ενέργεια. Έστω ότι οι ταχύτητες των σφαιριδίων αμέσως μετά την κρούση είναι όπως στο **Σχήμα 1**.

$$\vec{P}_{\text{Ολ πριν την κρούση}} = \vec{P}_{\text{Ολ μετά την κρούση}} \Rightarrow M_1 \vec{v}_1 = M \vec{V} + M_1 \vec{V}_1 \Rightarrow M_1 v_1 = MV - M_1 V_1 \quad (1)$$

$$K_{\text{Ολ πριν την κρούση}} = K_{\text{Ολ μετά την κρούση}} \Rightarrow \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} M_1 V_1^2 \Rightarrow M_1 v_1^2 = M V^2 + M_1 V_1^2 \quad (2)$$

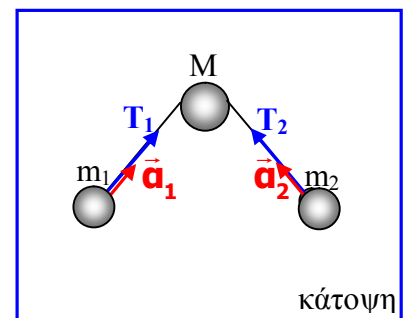
Από τις (1) και (2): $V = \frac{2M_1 v_0}{M + M_1} = 2\text{m/s} \quad (3) \quad V_1 = \frac{(M - M_1)v_0}{M + M_1} = 1\text{m/s} \quad (4)$

Από τις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι οι ταχύτητες των σφαιριδίων M και M_1 έχουν τις κατευθύνσεις που υποθέσαμε.



(Σχήμα 1)

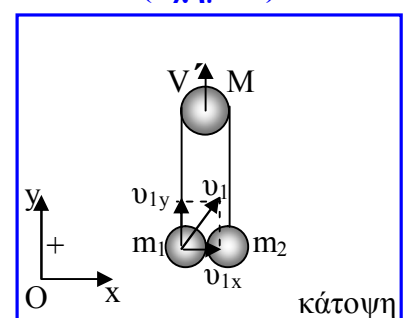
β. Επειδή τα σφαιρίδια m_1 και m_2 αρχικά ηρεμούν και οι δυνάμεις T_1 και T_2 κάθε στιγμή έχουν ίσα μέτρα οι στιγμιαίες επιταχύνσεις των σφαιριδίων θα είναι ίσες, άρα και τα μέτρα των στιγμιαίων ταχυτήτων τους μέχρι τη χρονική στιγμή που συγκρούονται θα είναι ίσα (**Σχήμα 2**).



(Σχήμα 2)

γ. Τη χρονική στιγμή που συγκρούονται τα σφαιρίδια μαζών m_1 και m_2 είναι οι ταχύτητές τους είναι v_1 και v_2 αντίστοιχα, με $v_1=v_2$ (5) και η ταχύτητα του σφαιριδίου μάζας M είναι V' .

Τα νήματα είναι μη εκτατά επομένως θα ισχύει $V'=v_{1y}=v_{2y}$ (6).



(Σχήμα 3)

Αλλά η ορμή του συστήματος των τριών σφαιριδίων κατά τον άξονα Oy μετά το τέλος της κρούσης των σφαιριδίων M-M₁ και μέχρι τη χρονική στιγμή που συγκρούονται τα σφαιρίδια m₁-m₂ διατηρείται:

$$\vec{P}_{O\lambda, y \text{ πριν την κρούση}} = \vec{P}_{O\lambda, y \text{ μετά την κρούση}} \Rightarrow M\vec{V} = M\vec{V}' + m_1\vec{v}_{1y} + m_2\vec{v}_{2y} \xRightarrow{v_{1y}=v_{2y}, m_1=m_2}$$

$$MV = MV' + 2m_1v_{1y} \xRightarrow{(6)} MV = (M + 2m_1)v_{1y} \Rightarrow v_{1y} = \frac{MV}{M + 2m_1} \xRightarrow{(3)} v_{1y} = v_{2y} = V' = 1,6 \text{ m/s} \quad (7).$$

Επειδή η κρούση των σφαιρών είναι τελείως ελαστική, η μηχανική ενέργεια του συστήματος m₁-m₂-M διατηρείται:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 \xRightarrow{m_1=m_2, v_1=v_2} M(V^2 - V'^2) = 2m_1v_1^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{M(V^2 - V'^2)}{2m_1}} \xRightarrow{(3)} \xRightarrow{(7)} v_1 = v_2 = 2,4 \text{ m/s}.$$

Ε. Στεργιάδης