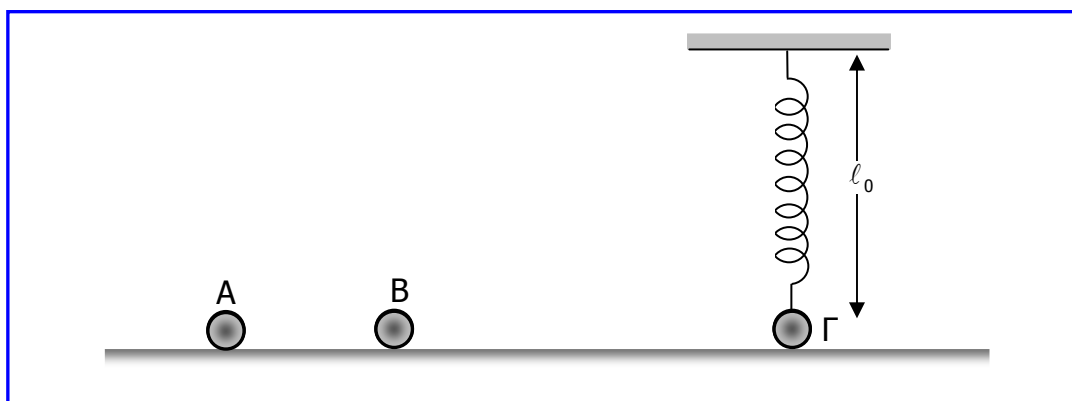


Επιλογή του τρόπου κρούσης και απώλεια επαφής



Οι δύο μικρές σφαίρες A και B του σχήματος έχουν ίσες μάζες και κινούνται στο λείο οριζόντιο δάπεδο. Οι σφαίρες συγκρούονται και η κρούση τους είναι κεντρική και πλαστική. Όταν οι δύο σφαίρες πριν την κρούση κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται αμέσως μετά την κρούση έχει κινητική ενέργεια $K_{\sigma,1}=32\text{J}$, ενώ όταν κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει κινητική ενέργεια $K_{\sigma,2}=8\text{J}$.

A₁. Να υπολογίσετε τις κινητικές ενέργειες K_A και K_B των σφαιρών A και B αντίστοιχα πριν την κρούση.

A₂. Αν οι μάζες των σφαιρών A και B είναι $m_A=m_B=2\text{Kg}$, να υπολογίσετε τις ταχύτητες v_A και v_B των σφαιρών A και B αντίστοιχα πριν την κρούση και να υποδείξετε τους δυνατούς τρόπους κίνησής τους πριν την κρούση, ώστε το συσσωμάτωμα που δημιουργείται κατά την κρούση να κινηθεί προς τα δεξιά.

B₁. Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του μέτρου της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση των σφαιρών A και B με βάση τα συμπεράσματα του προηγούμενου ερωτήματος.

B₂. Το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται αμέσως μετά την κρούση των σφαιρών A και B του προηγούμενου ερωτήματος συνεχίζει να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και τελείως ελαστικά με σφαίρα Γ μάζας $m_\Gamma=4\text{ Kg}$ η οποία ηρεμεί συνδεδεμένη στο ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=200\frac{\text{N}}{\text{m}}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το φυσικό μήκος

του ελατηρίου είναι $\ell_0=0,6\text{m}$. Καθώς η σφαίρα Γ κινείται, ο αρχικά κατακόρυφος άξονας του ελατηρίου στρέφεται και το ελατήριο παραμορφώνεται κατά τη διεύθυνση του άξονά του, χωρίς να μεταβάλλει τη μορφή του. Από τους τρόπους κίνησης των σφαιρών A και B του προηγούμενου ερωτήματος, να επιλέξετε τον κατάλληλο, ώστε μετά την κρούση του συσσωματώματος με τη σφαίρα Γ, αυτή να χάνει την επαφή της με το οριζόντιο δάπεδο. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση της σφαίρας Γ μέχρι αυτή να βρεθεί στη θέση που χάνεται η επαφή της με το δάπεδο.

Γ. Μετά την κρούση των σφαιρών A και B με τον τρόπο που επιλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα και την κρούση του συσσωματώματος που δημιουργείται με τη σφαίρα Γ, αυτή κινείται και ο άξονας του ελατηρίου σε κάποια θέση της σφαίρας Γ σχηματίζει γωνία θ με τον αρχικά κατακόρυφο προσανατολισμό του. Αν στη θέση

αυτή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας Γ είναι $\frac{\Delta p_\Gamma}{\Delta t} = -16 \text{ Nm}$ (S.I), να υπολογίσετε τη μετατόπισή της. Δίνονται $g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\sqrt{2}=1,4$ και $\sqrt{5}=2,236$.

Λύση

A₁. Από τη σχέση που συνδέει την κινητική ενέργεια ενός σώματος K με το μέτρο της ορμής του έχουμε: $K = \frac{p^2}{2m}$.

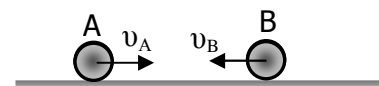
Όταν οι σφαίρες A και B κινούνται **ομόρροπα** :



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\sigma,1} \Rightarrow p_1 + p_2 = p_{\sigma,1}$$

$$\sqrt{2mK_A} + \sqrt{2mK_B} = \sqrt{2 \cdot 2mK_{\sigma,1}} \Rightarrow \sqrt{K_A} + \sqrt{K_B} = \sqrt{64} \Rightarrow \sqrt{K_A} + \sqrt{K_B} = 8 \text{ J} \quad (1)$$

Όταν οι σφαίρες A και B κινούνται **αντίρροπα** :



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\sigma,1} \Rightarrow |p_1 - p_2| = p_{\sigma,2} \Rightarrow |\sqrt{2mK_A} - \sqrt{2mK_B}| = \sqrt{2 \cdot 2mK_{\sigma,2}}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{K_A} - \sqrt{K_B}| = 4 \text{ J} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{K_A} - \sqrt{K_B} = 4 \text{ J} & (2\alpha) \\ \sqrt{K_A} - \sqrt{K_B} = -4 \text{ J} & (2\beta) \end{cases}$$

Από (1) + (2α) : $\sqrt{K_A} = 6 \Rightarrow K_A = 36 \text{ J} \quad (3\alpha)$ και $K_B = 4 \text{ J} \quad (4\alpha)$

Από (1) + (2β) : $\sqrt{K_A} = 2 \Rightarrow K_A = 4 \text{ J} \quad (3\beta)$ και $K_B = 36 \text{ J} \quad (4\beta)$

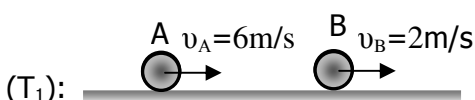
A₂. $K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow |v_A| = 6 \text{ m/s} \quad (5\alpha)$ και $K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \Rightarrow |v_B| = 2 \text{ m/s} \quad (6\alpha)$

ή

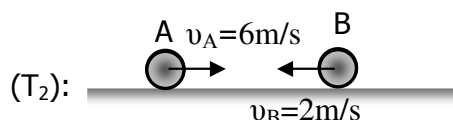
$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow |v_A| = 2 \text{ m/s} \quad (6\alpha)$ και $K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \Rightarrow |v_B| = 6 \text{ m/s} \quad (6\beta)$

Οι δυνατοί τρόποι κίνησης των σφαιρών A και B πριν την πλαστική κρούση τους, ώστε το συσσωμάτωμα να κινηθεί προς τα δεξιά, είναι:

ΟΜΟΡΡΟΠΑ (1^{ος} τρόπος)



ΑΝΤΙΡΡΟΠΑ (2^{ος} τρόπος)



Για να έχει η ορμή του συσσωματώματος μετά την κεντρική πλαστική κρούση κατεύθυνση οριζόντια προς τα δεξιά, πρέπει οι ομόρροπες ορμές των σφαιρών πριν την κρούση να έχουν φορά προς τα δεξιά και

Για να έχει η ορμή του συσσωματώματος μετά την κρούση κατεύθυνση οριζόντια προς τα δεξιά, πρέπει $|\vec{p}_{A \text{ πριν}}| > |\vec{p}_{B \text{ πριν}}|$,
άρα $|\vec{v}_A| > |\vec{v}_B|$.

$v_A > v_B$ για να υπάρχει η δυνατότητα συνάντησης και κρούσης.

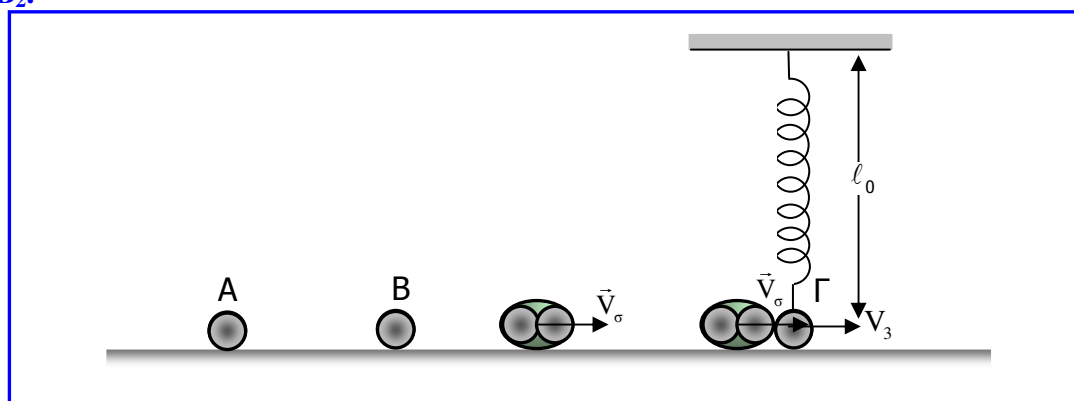
B₁. Όταν οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά με τον 1^ο τρόπο:

$$\text{Α.Δ.Ο: } \vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{P}_\sigma \xRightarrow{+} m v_A + m v_B = 2m V_{\sigma_1} \Rightarrow V_{\sigma_1} = 4 \text{ m/s} \quad (7\alpha)$$

Όταν οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά με τον 2^ο τρόπο:

$$\text{ΑΔΟ: } \vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{P}_\sigma \xRightarrow{+} m v_A - m v_B = 2m V_{\sigma_2} \Rightarrow V_{\sigma_2} = 2 \text{ m/s} \quad (7\beta)$$

B₂.



Κατά την κεντρική ελαστική κρούση του συσσωματώματος με τη σφαίρα Γ η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρούνται:

$$\text{Α.Δ.Ο: } \vec{P}_{\sigma \text{ πριν}} = \vec{P}_{\sigma \text{ μετά}} + \vec{P}_{3 \text{ μετά}} \xRightarrow{+} 2m V_\sigma = 2m V'_\sigma + m_3 v_3 \Rightarrow V_\sigma = V'_\sigma + V_3 \quad (8)$$

$$K_{O\Lambda \text{ πριν}} = K_{O\Lambda \text{ μετά}} \Rightarrow \frac{1}{2} 2m V_\sigma^2 = \frac{1}{2} 2m V'^2_\sigma + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 \Rightarrow V_\sigma^2 = V'^2_\sigma + V_3^2 \quad (9)$$

Από (8) και (9), $V'_\sigma = 0$ και $V_3 = V_\sigma$.

$$\text{Άρα } V_{\sigma_1} = V_{\sigma_1} = 4 \text{ m/s} \quad (10) \text{ και } V_{\sigma_2} = V_{\sigma_2} = 2 \text{ m/s} \quad (11)$$

Όταν η σφαίρα Γ κινείται σε επαφή με το δάπεδο : $F_{\epsilon\lambda y} + N = m_3 g$. Η επαφή της σφαίρας Γ με το δάπεδο χάνεται, όταν $N=0$, τότε:

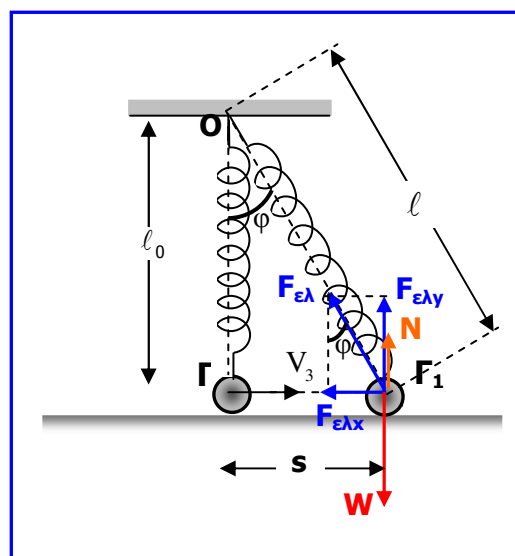
$$F_{\epsilon\lambda y} = m_3 g \Rightarrow k \Delta l \sin \varphi = m_3 g \Rightarrow$$

$$k \Delta l \frac{\ell_0}{\ell} = m_3 g \Rightarrow k \Delta l \frac{\ell_0}{\ell_0 + \Delta l} = m_3 g \Rightarrow$$

$$k \Delta l \ell_0 = m_3 g \ell_0 + m_3 g \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{m_3 g \ell_0}{k \ell_0 - m_3 g}$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0,6}{200 \cdot 0,6 - 4 \cdot 10} \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{24}{80} \Rightarrow \Delta l = 0,3 \text{ m} \quad (12)$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{O}\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}_1$:

$$\begin{aligned}\ell^2 &= \ell_0^2 + s^2 \Rightarrow s = \sqrt{\ell^2 - \ell_0^2} \Rightarrow s = \sqrt{(\ell_0 + \Delta\ell)^2 - \ell_0^2} \\ \Rightarrow s &= \sqrt{\Delta\ell(2\ell_0 + \Delta\ell)} \Rightarrow s = \sqrt{0,3(1,2 + 0,3)} \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= \sqrt{45 \cdot 10^{-2}} \stackrel{(12)}{\Rightarrow} s = 0,3\sqrt{5} \text{ m} = 0,67 \text{ m} \quad (13).\end{aligned}$$

Επομένως για να χαθεί η επαφή σφαίρας Γ – δαπέδου, πρέπει η σφαίρα Γ να φθάσει στη θέση Γ_1 . Η ελάχιστη τιμή ταχύτητας $V_{3\min}$ για την οποία η σφαίρα Γ φθάνει στην κρίσιμη θέση Γ_1 είναι:

Θ.Μ.Κ.Ε $\Gamma \rightarrow \Gamma_1$:

$$\begin{aligned}0 - \frac{1}{2} m_{\Gamma} V_{3\min}^2 &= 0 - \frac{1}{2} k \Delta\ell^2 \Rightarrow V_{3\min} = \Delta\ell \sqrt{\frac{k}{m_{\Gamma}}} \stackrel{(12)}{\Rightarrow} V_{3\min} = 0,3 \sqrt{\frac{200}{4}} \\ \Rightarrow V_{3\min} &= 0,3\sqrt{50} \Rightarrow V_{3\min} = 1,5\sqrt{2} \Rightarrow V_{3\min} = 2,1 \text{ m/s} \quad (14).\end{aligned}$$

Από (10) και (11) $V_{3\alpha} > V_{3\min}$, ενώ $V_{3\beta} < V_{3\min}$ και ο 2^{ος} τρόπος κίνησης των σφαιρών Α και Β απορρίπτεται.

Επομένως η σφαίρα Γ μπορεί να φθάσει στη θέση Γ_1 που χάνεται η επαφή με το δάπεδο **ΜΟΝΟ** στην περίπτωση που οι σφαίρες κινούνται ομόρροπα και προφανώς η σφαίρα Β προηγείται.

Γ. Εάν $\hat{\theta}$ = η γωνία που σχηματίζει ο άξονας του ελατηρίου με την αρχική κατακόρυφη θέση του: $\eta\mu\hat{\theta} = \frac{s_1}{\ell_1} \Rightarrow s_1(\ell_0 + \Delta\ell_1)\eta\mu\hat{\theta} \quad (13).$

Θέση (Γ_2):

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = -16\eta\mu\hat{\theta} \Rightarrow -F_{\varepsilon\lambda x} = -16\eta\mu\hat{\theta} \Rightarrow$$

$$K\Delta\ell\eta\mu\hat{\theta} = 16\eta\mu\hat{\theta} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{16}{200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\ell = 0,08\text{m} \Rightarrow \ell_1 - \ell_0 = 0,08 \Rightarrow$$

$$\ell_1 = 0,68 \stackrel{\hat{O}\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}_2}{\Rightarrow} \sqrt{\ell_0^2 + s_1^2} = 0,68 \Rightarrow$$

$$0,6^2 + s_1^2 = 0,68^2 \Rightarrow s_1^2 = 0,68^2 - 0,6^2 \Rightarrow$$

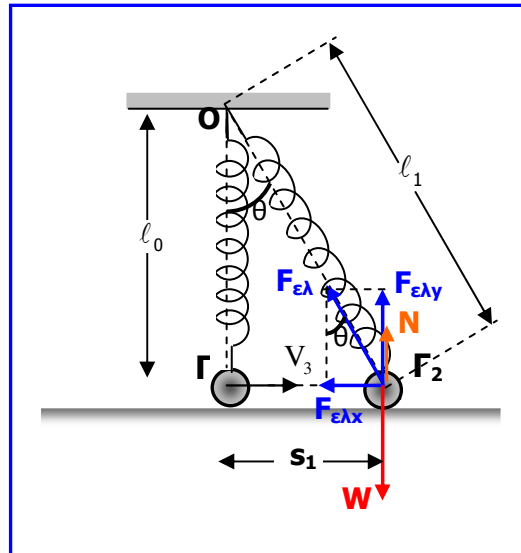
$$s_1^2 = 1,28 \cdot 0,08 \Rightarrow s_1^2 = 128 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \Rightarrow s_1^2 = 1024 \cdot 10^{-4} \Rightarrow s_1 = 32 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$$

$$s_1 = 0,32\text{m}$$

Η τιμή της μετατόπισης s_1 είναι αποδεκτή διότι $s_1 < s = 0,67\text{m}$.

Σχόλιο

Όταν σε κάποιο πρόβλημα ζητείται η μετατόπιση και η επιτάχυνση της κίνησης δεν είναι σταθερή - όπως στην περίπτωση της σφαίρας Γ που κινείται με την επίδραση



της $F_{ελx}$ μέχρι να χάσει την επαφή με το δάπεδο – συνήθως προτρέπουμε τους μαθητές να σκεφτούν την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε (ή Θ.Ε.Ε).

Στο ερώτημα Γ έγινε η «έκπληξη», δηλαδή υπολογίσαμε μετατόπιση με την εφαρμογή της γενικευμένης μορφής του 2^{ου} Νόμου του Newton.

Στην ουσία δεν πρόκειται για «έκπληξη». Το Θ.Μ.Κ.Ε δεν είναι μια «αυτόνομη» ενεργειακή αρχή, αλλά προκύπτει από το 2^ο Ν.Ν, δηλαδή μια δυναμική εξίσωση. Πράγματι, για μια στοιχειώδη μετατόπιση Δs της σφαίρας Γ έχουμε:

$$\Delta W_{F_{ελx}} = \Delta K \Rightarrow -F_{ελx} \cdot \Delta s = \Delta \left(\frac{1}{2} m V_{\Gamma}^2 \right) \Rightarrow -F_{ελx} \cdot V_{\Gamma} \Delta t = m \Delta V_{\Gamma} \cdot V_{\Gamma} \Rightarrow -F_{ελx} = \frac{\Delta p_{\Gamma}}{\Delta t}.$$

Ε.Στεργιάδης