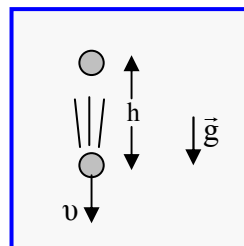


Από την ελεύθερη πτώση στην εξαναγκασμένη ταλάντωση

Σώμα μικρών διαστάσεων με μάζα $m=0,4\text{Kg}$ αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος πάνω από το έδαφος μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας. Το σώμα δέχεται την επίδραση δύναμης αντίστασης (απόσβεσης) από τον αέρα της μορφής $F' = -bv$, όπου b =σταθερά με $b > 0$ και v = η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας. Όταν το σώμα έχει κατέλθει κατά $h=0,8\text{m}$, η ταχύτητα του είναι κατά 20% μικρότερη της ταχύτητας που θα είχε αν εκτελούσε ελεύθερη πτώση και είχε κατέλθει κατά το ίδιο ύψος, ενώ η επιτάχυνση του σώματος είναι κατά 8m/s^2 μικρότερη αυτής που θα είχε στην ίδια θέση αν εκτελούσε ελεύθερη πτώση.



α. Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς b .

Συνδέουμε το σώμα στο ένα άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο και το σύστημα ηρεμεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σε οριζόντιο δάπεδο. Όταν εκτρέψουμε το σώμα κατά $\Delta x=0,5\text{ m}$ και το αφήσουμε ελεύθερο αυτό εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με την επίδραση πάλι δύναμης απόσβεσης της μορφής $F' = -bv$ και μετά από κάποιο χρόνο ηρεμεί πάλι στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Το έργο της δύναμης F' σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σώματος είναι $W_{F'} = -22,5\text{J}$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου.

Όταν στο σύστημα «ελατήριο- σώμα» του προηγούμενου ερωτήματος επιδρά και δύναμη διέγερσης της μορφής $F_s = 8\sqrt{2}\eta\mu(20t)$ (S.I) αυτό εκτελεί ταλάντωση σταθερού πλάτους με εξίσωση απομάκρυνση της μορφής $x = A\eta\mu(20t + \phi_0)$ (S.I) με $\pi < \phi_0 < 2\pi$. Να υπολογίσετε:

γ. το πλάτος A της ταλάντωσης,

δ. τις τιμές της συχνότητας της δύναμης διέγερσης για τις οποίες το σώμα ταλαντώνεται με το πλάτος του προηγούμενου ερωτήματος.

ε. τις τιμές της αρχικής φάσης ϕ_0 της απομάκρυνσης, όταν η δύναμη διέγερσης επιδρά με τις συχνότητες του προηγούμενου ερωτήματος.

Δίνεται η ένταση του πεδίου βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση

α. Όταν το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση η μηχανική του ενέργεια

διατηρείται: $E_{M(O)} = E_{M(\Gamma)} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 \Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_{\Gamma} = 4\text{m/s}$ (1).

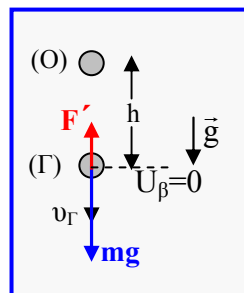
Όταν το σώμα κινείται με την επίδραση της δύναμης αντίστασης του αέρα F'

η ταχύτητά του στη θέση Γ θα είναι: $v'_{\Gamma} = v_{\Gamma} - \frac{20}{100}v_{\Gamma} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} v'_{\Gamma} = 3,2\text{m/s}$ (2).

Η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Γ είναι: $a_{\Gamma} = g - 8 \Rightarrow a_{\Gamma} = 2\text{m/s}^2$ (3).

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής, όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση Γ

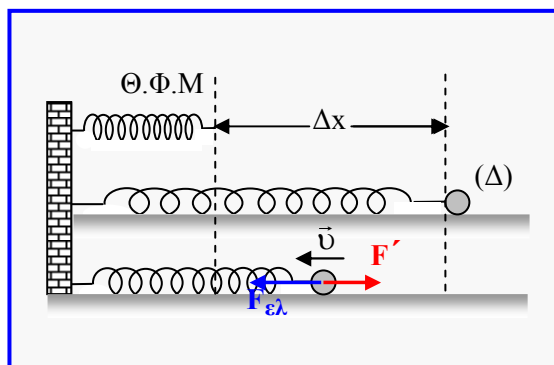
έχουμε: $\Sigma \vec{F}_{(\Gamma)} = m\vec{a}_{\Gamma} \Rightarrow m\vec{g} - b\vec{v}'_{\Gamma} = m\vec{a}_{\Gamma} \Rightarrow b = \frac{m(g - a_{\Gamma})}{v'_{\Gamma}} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} b = \frac{0,4(10 - 2)}{3,2} \Rightarrow b = 1\text{kg/s}$ (4).



β. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε από τη θέση (Δ) στην οποία εκτρέψαμε το σώμα και από την οποία το αφήσαμε ελεύθερο μέχρι τη θέση φυσικού μήκους όπου αυτό θα ισορροπήσει όταν ολοκληρώσει τη φθίνουσα ταλάντωση που εκτελεί.

Θ.Μ.Κ.Ε $_{(\Delta) \rightarrow \Theta.Φ.Μ}$: $W_{F_{ελ}} + W_{F'} = K_{\Theta.Φ.Μ} - K_{\Delta} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}k\Delta x^2 - 0 + W_{F'} = 0 - 0 \Rightarrow \frac{1}{2}k0,5^2 - 22,5 = 0 \Rightarrow$



$$k = \frac{45}{0,25} \Rightarrow k = 180 \text{ N / m} \quad (5)$$

γ. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την εξαναγκασμένη ταλάντωση που εκτελεί το σύστημα με την επίδραση της δύναμης διέγερσης F_{δ} έχουμε:

$$F_{ελ} + F' + F_{\delta} = ma \Rightarrow -kx - bv + F_{\delta} = -m\omega_{\delta}^2 x \quad (6)$$

Αλλά, $x = A\eta\mu(20t + \varphi_0)$, $v = 20A\sigma\upsilon\nu(20t + \varphi_0)$ και $F_{\delta} = 8\sqrt{2}\eta\mu(20t)$, όπου $\omega_{\delta} = 20 \text{ rad / s}$.

Με αντικατάσταση στην (6):

$$-kA\eta\mu(20t + \varphi_0) - b20A\sigma\upsilon\nu(20t + \varphi_0) + 8\sqrt{2}\eta\mu(20t) = -0,4 \cdot 400 \cdot A\eta\mu(20t + \varphi_0)$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} -180A\eta\mu(20t + \varphi_0) - 1 \cdot 20A\sigma\upsilon\nu(20t + \varphi_0) + 8\sqrt{2}\eta\mu(20t) = -160A\eta\mu(20t + \varphi_0) \quad (7)$$

Αν στην (7) θέσουμε $20t + \varphi_0 = 2k\pi$:

$$-20A + 8\sqrt{2}\eta\mu(-\varphi_0) = 0 \Rightarrow -8\sqrt{2}\eta\mu\varphi_0 = 20A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{5\sqrt{2}}{4}A \quad (8)$$

Αντίστοιχα αν στην (7) θέσουμε $20t + \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$:

$$-180A + 8\sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = -160A \Rightarrow 8\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = 20A \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \frac{5\sqrt{2}}{4}A \quad (9)$$

Από (8) και (9): $\eta\mu^2\varphi_0 = \frac{25}{8}A^2$ και $\sigma\upsilon\nu^2\varphi_0 = \frac{25}{8}A^2$. Αν αθροίσουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις:

$$1 = \frac{50}{8}A^2 \Rightarrow A = 0,4\text{m} \quad (10)$$

δ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Από (8)} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Από (9)} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi < \varphi_0 < 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

Ζητάμε μια άλλη τιμή κυκλικής συχνότητας διέγερσης ω'_{δ} για την οποία το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης να είναι το ίδιο, $A=0,4\text{m}$. Με αντικατάσταση πάλι στην (6):

$$-kA\eta\mu(\omega'_{\delta}t + \varphi_0) - b\omega'_{\delta}A\sigma\upsilon\nu(\omega'_{\delta}t + \varphi_0) + 8\sqrt{2}\eta\mu(\omega'_{\delta}t) = -0,4 \cdot \omega_{\delta}'^2 \cdot A\eta\mu(\omega'_{\delta}t + \varphi_0) \quad (7a)$$

Αν στην (7a) θέσουμε $\omega'_{\delta}t + \varphi_0 = 2k\pi$: $-b\omega'_{\delta}A + F_{0\delta}\eta\mu\varphi_0 = 0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{b\omega'_{\delta}A}{F_{0\delta}} \quad (11)$

Αν στην (7a) θέσουμε $\omega'_{\delta}t + \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$: $-kA + F_{0\delta}\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \varphi_0) = -m\omega_{\delta}'^2A \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \frac{(k - m\omega_{\delta}'^2)A}{F_{0\delta}} \quad (12)$

Επειδή $A > 0$ και $\pi < \varphi_0 < 2\pi$, η αλλαγή της κυκλικής συχνότητας διέγερσης από ω_{δ} σε ω'_{δ} δεν προκαλεί μεταβολή στην τιμή του $\eta\mu\varphi_0$. Επομένως ίδια τιμή πλάτους A μπορούμε να έχουμε αν αλλάξει η τιμή του $\sigma\upsilon\nu\varphi_0$ και γίνει $\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ που σημαίνει ότι αλλάζει πρόσημο η διαφορά $k - m\omega_{\delta}'^2$.

$$\text{Από (12)} \xrightarrow[(10)]{(5)} -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(180 - 0,4\omega_{\delta}'^2)0,4}{8\sqrt{2}} \Rightarrow -8 = 72 - 0,16\omega_{\delta}'^2 \Rightarrow \omega_{\delta}'^2 = 500 \Rightarrow \omega_{\delta}' = 10\sqrt{5}\text{rad/s} \quad (13)$$

Άρα οι τιμές της συχνότητας διέγερσης για τις οποίες η εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει πλάτος

$$A=0,4\text{m είναι: } f_{\delta} = \frac{\omega_{\delta}}{2\pi} \Rightarrow f_{\delta} = \frac{20}{2\pi} \Rightarrow f_{\delta} = \frac{10}{\pi}\text{Hz και } f'_{\delta} = \frac{\omega'_{\delta}}{2\pi} \Rightarrow f'_{\delta} = \frac{10\sqrt{5}}{2\pi} \Rightarrow f'_{\delta} = \frac{5\sqrt{5}}{\pi}\text{Hz}.$$

$$\epsilon. \text{ Οι ζητούμενες τιμές αρχικής φάσης είναι: } \varphi_0 = \frac{7\pi}{4}\text{rad και από (8): } \eta\mu\varphi'_0 = -\frac{5\sqrt{2}}{4}0,4 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi'_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και από (12)} \xrightarrow{(13)} \sin\varphi_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ με } \pi < \varphi'_0 < 2\pi, \text{ άρα } \varphi'_0 = \frac{5\pi}{4}\text{rad}.$$

Σχόλιο

Οι τιμές των ω_{δ} και ω'_{δ} βρίσκονται εκατέρωθεν της ω_0 (κυκλικής ιδιοσυχνότητας), πράγματι:

$$\omega_{\delta} = 20\text{rad/s} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{450}\text{rad/s} < \omega'_{\delta} = 10\sqrt{5}\text{rad/s} \text{ ή πιο αυστηρά:}$$

$$\omega_{\delta} = 20\text{rad/s} < \omega_{\text{συντονισμού}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2b^2}{4m^2}} = \sqrt{446,875}\text{rad/s} < \omega'_{\delta} = 10\sqrt{5}\text{rad/s}$$

Ε. Στεργιάδης