

**Η φθίνουσα, η εξαναγκασμένη, η σύνθεση εξισώσεων ταλαντώσεων
και κύποιες...«λεπτομέρειες» .**

Ερώτηση 1^η

A₁. Σε φθίνουσα ταλάντωση η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής $F=-bv$ και η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης είναι E_0 . Σε χρονικές στιγμές $t=NT$, όπου $T=$ η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης και $N \in \mathbb{Z}^+$ που η ταχύτητα μηδενίζεται και η απομάκρυνση έχει μέγιστη θετική τιμή, θεωρούμε ότι η ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $E = E_0 e^{-2\lambda NT}$. Αν ΔE_N , ΔE_{N+1} και ΔE_{N+2} είναι αντίστοιχα οι απώλειες της ενέργειας ταλάντωσης σε τρεις διαδοχικές περιόδους, τότε:

α. $\Delta E_{N+1} = \Delta E_N + \Delta E_{N+2}$ **β.** $\Delta E_{N+1} = \Delta E_N \cdot \Delta E_{N+2}$ **γ.** $\Delta E_{N+1}^2 = \Delta E_N \cdot \Delta E_{N+2}$

A₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 2^η

B₁. Η φθίνουσα ταλάντωση ενός σώματος εξελίσσεται με την επίδραση της δύναμης επαναφοράς $F_{\epsilon\pi} = -Dx$ και της δύναμης απόσβεσης $F_{\alpha\pi} = -bv$, όπου $x=$ η απομάκρυνση από τη θέση αναφοράς $x=0$, $v=$ η ταχύτητα, $D=$ η σταθερά επαναφοράς και $b=$ η θετική σταθερά απόσβεσης.

α. Όταν η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται μέγιστη, η δυναμική του ενέργεια μηδενίζεται.

β. Στη θέση $x=0$ η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μέγιστη.

γ. Όταν η δυναμική ενέργεια του σώματος γίνεται μέγιστη, η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται.

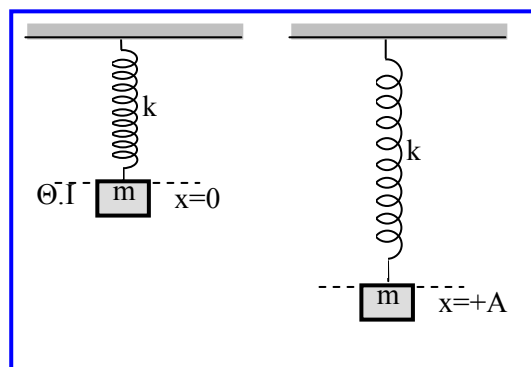
B₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ερώτηση 3^η

Γ₁. Το κατακόρυφο σύστημα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k - σώματος μάζας m ισορροπεί. Με την επίδραση δύναμης διέγερσης F_δ που επιδρά σ' αυτό με συχνότητα $f_\delta < f_0$ ($f_0 =$ η ιδιοσυχνότητα του συστήματος) το σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση σταθερού πλάτους A και η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής $F_{\alpha\pi} = -bv$, όπου $v=$ η ταχύτητα του σώματος και $b=$ η θετική σταθερά απόσβεσης. Αν $W_{F_\delta,1}$ και $W_{F_\delta,2}$ τα έργα της δύναμης διέγερσης κατά την κίνηση του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας $x=0$ έως τη θέση $x=+A$ και από τη θέση $x=+A$ έως τη θέση ισορροπίας $x=0$ αντίστοιχα, τότε

α. $W_{F_\delta,1} - W_{F_\delta,2} = 0$ **β.** $W_{F_\delta,1} - W_{F_\delta,2} > 0$ **γ.** $W_{F_\delta,1} - W_{F_\delta,2} < 0$

Γ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Ερώτηση 4^η

Δ₁. Σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η εξίσωση της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $v = \omega A \sin(\omega t + \theta)$. Η προηγούμενη εξίσωση θεωρούμε ότι προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων $v_1 = \omega A_1 \sin(\omega t)$ και $v_2 = \omega A_2 \sin(\omega t + \phi)$ που αντιστοιχούν στις εξισώσεις των ταχυτήτων δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, ίδιας διεύθυνσης και ίδιας θέσης ισορροπίας με $0 \leq \theta < \phi < 2\pi$. Αν K , K_1 και K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες των ταλαντώσεων με ταχύτητες v , v_1 και v_2 αντίστοιχα την ίδια χρονική στιγμή t , τότε ισχύει:

α. $K = K_1 + K_2 \pm 2\sqrt{K_1 \cdot K_2}$ **β.** $K = K_1 + K_2$ **γ.** $K = K_1 + K_2$

Δ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

A₁. γ

A₂. $\Delta E_N = E_{N-1} - E_N \Rightarrow \Delta E_N = E_0 \cdot e^{-2\Lambda(N-1)T} - E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} \Rightarrow \Delta E_N = E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} (e^{2\Lambda T} - 1)$ (1)

$\Delta E_{N+1} = E_N - E_{N+1} \Rightarrow \Delta E_{N+1} = E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} - E_0 \cdot e^{-2\Lambda(N+1)T} \Rightarrow \Delta E_{N+1} = E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} (1 - e^{-2\Lambda T})$ (2)

$\Delta E_{N+2} = E_{N+1} - E_{N+2} \Rightarrow \Delta E_{N+2} = E_0 \cdot e^{-2\Lambda(N+1)T} - E_0 \cdot e^{-2\Lambda(N+2)T} \Rightarrow \Delta E_{N+2} = E_0 \cdot e^{-2\Lambda(N+1)T} (1 - e^{-2\Lambda T})$ (3)

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$\frac{\Delta E_N}{\Delta E_{N+1}} = \frac{E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} (e^{2\Lambda T} - 1)}{E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} (1 - e^{-2\Lambda T})} \Rightarrow \frac{\Delta E_N}{\Delta E_{N+1}} = \frac{(e^{2\Lambda T} - 1)}{(1 - e^{-2\Lambda T})} e^{2\Lambda T} \Rightarrow \frac{\Delta E_N}{\Delta E_{N+1}} = e^{2\Lambda T}$ (4)

Διαιρούμε κατά μέλη τις (2) και (3):

$\frac{\Delta E_{N+1}}{\Delta E_{N+2}} = \frac{E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} (1 - e^{-2\Lambda T})}{E_0 \cdot e^{-2\Lambda(N+1)T} (1 - e^{-2\Lambda T})} \Rightarrow \frac{\Delta E_{N+1}}{\Delta E_{N+2}} = \frac{1}{e^{-2\Lambda T}} \Rightarrow \frac{\Delta E_{N+1}}{\Delta E_{N+2}} = e^{2\Lambda T}$ (5)

Από (4) και (5): $\frac{\Delta E_N}{\Delta E_{N+1}} = \frac{\Delta E_{N+1}}{\Delta E_{N+2}} \Rightarrow \Delta E_{N+1}^2 = \Delta E_N \cdot \Delta E_{N+2}$

Σχόλιο

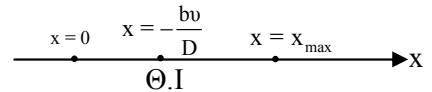
Παρατηρούμε ότι οι απώλειες της ενέργειας ταλάντωσης σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα διάρκειας μιας περιόδου έχουν σταθερό λόγο και αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Παρουσιάζουν δηλαδή, ανάλογη ιδιότητα με τις διαδοχικές τιμές πλατών και ενεργειών. Επίσης, ενώ η απώλεια της ενέργειας ταλάντωσης εξαρτάται από την τάξη της παραμέτρου N, το κλάσμα απώλειας είναι σταθερό:

$\frac{\Delta E_N}{E_{N-1}} = \frac{E_0 \cdot e^{-2\Lambda NT} (e^{2\Lambda T} - 1)}{E_0 \cdot e^{-2\Lambda(N-1)T}} \Rightarrow \frac{\Delta E_N}{E_{N-1}} = 1 - e^{-2\Lambda T}$.

B₁. γ

B₂. Στο σχήμα απεικονίζονται η θέση αναφοράς $x=0$, μία από τις διαδοχικές θέσεις ισορροπίας (Θ.Ι) όπου:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\pi} = 0 \Rightarrow -Dx - bv = 0 \Rightarrow x = -\frac{bv}{D}$ και μία θέση



μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

Όταν η κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι) η δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{2} Dx^2 \neq 0$.

Η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται σε θέσεις ισορροπίας όπου $x = -\frac{bv}{D}$, στη θέση $x=0$

$\Sigma F = F_{\alpha\pi} \Rightarrow ma = -bv \Rightarrow a = -\frac{bv}{m} \neq 0$, άρα η ταχύτητα δεν μπορεί να μεγιστοποιείται διότι υπάρχει

ρυθμός μεταβολής της.

Η δυναμική ενέργεια μεγιστοποιείται στις ακραίες θέσεις όπου η ταχύτητα στιγμιαία μηδενίζεται, άρα και η κινητική ενέργεια.

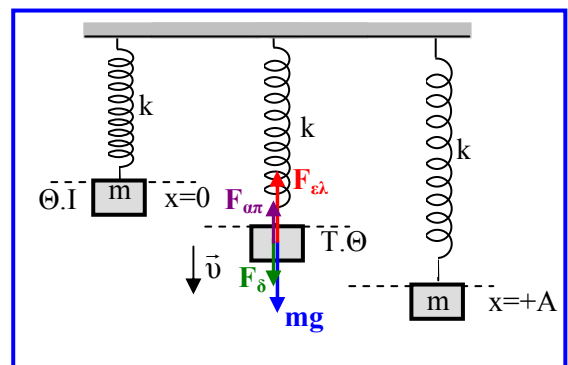
Γ₁. β

Γ₂. Στο σώμα επιδρούν η βαρυτική δύναμη mg , η δύναμη από το ελατήριο $F_{\varepsilon\lambda}$, η δύναμη απόσβεσης $F_{\alpha\pi}$ και η δύναμη του διεγέρτη F_{δ} . Η βαρυτική δύναμη και η δύναμη από το ελατήριο συναποτελούν τη δύναμη επαναφοράς, δηλαδή $\vec{F}_{\varepsilon\pi} = m\vec{g} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -D\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\pi} = -k\vec{x}$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για τη διαδρομή $x=0 \rightarrow x = +A$.

$W_{F_{\delta 1}} + W_{F_{\alpha\pi}} + W_{F_{\varepsilon\pi}} = 0 - \frac{1}{2} mv_{\max}^2 \Rightarrow$

$W_{F_{\delta 1}} - |W_{F_{\alpha\pi}}| + 0 - \frac{1}{2} kA^2 = 0 - \frac{1}{2} mv_{\max}^2 \Rightarrow$



$$W_{F_{\delta 1}} = \frac{1}{2}kA^2 + |W_{F_{\alpha\pi}}| - \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (1)$$

Αντίστοιχα εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για τη διαδρομή $x=+A \rightarrow x=0$.

$$W_{F_{\delta 2}} + W_{F_{\alpha\pi}} + W_{F_{\varepsilon\pi}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - 0 \Rightarrow W_{F_{\delta 1}} - |W_{F_{\alpha\pi}}| + \frac{1}{2}kA^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\delta 2}} = -\frac{1}{2}kA^2 + |W_{F_{\alpha\pi}}| + \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (2)$$

Από την αφαίρεση των (1) και (2):

$$W_{F_{\delta 1}} - W_{F_{\delta 2}} = kA^2 - mv_{\max}^2 \Rightarrow W_{F_{\delta 1}} - W_{F_{\delta 2}} = mA^2(\omega_0^2 - \omega_{\delta}^2) \Rightarrow W_{F_{\delta 1}} - W_{F_{\delta 2}} = mA^2 4\pi^2(f_0^2 - f_{\delta}^2) \Rightarrow$$

$$W_{F_{\delta 1}} - W_{F_{\delta 2}} > 0 \quad f_{\delta} < f_0$$

Παρατήρηση

Το έργο της δύναμης απόσβεσης $W_{F_{\alpha\pi}}$ στις μετατοπίσεις $x=0 \rightarrow x=+A$ και $x=+A \rightarrow x=0$ είναι το ίδιο διότι: Έστω ότι οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι $x = A\eta\mu(\omega_{\delta}t + \varphi_0)$ και $v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega_{\delta}t + \varphi_0)$. Αν υψώσουμε τις δύο σχέσεις αυτές στο τετράγωνο και προσθέσουμε κατά μέλη καταλήγουμε στη γνωστή σχέση $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ (3). Επομένως, η δύναμη της απόσβεσης γράφεται $F_{\alpha\pi} = -bv \Rightarrow F_{\alpha\pi} = \pm b\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ (4). Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το μέτρο της $F_{\alpha\pi}$ στις ίδιες θέσεις είναι το ίδιο και ανεξάρτητο από τη φορά της ταχύτητας και η κατεύθυνσή της διαρκώς αντίθετη της ταχύτητας. Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι στις ίδιες θέσεις η ταχύτητα έχει το ίδιο μέτρο. Άρα, στις παραπάνω μετατοπίσεις το έργο $W_{F_{\alpha\pi}}$ είναι το ίδιο.

Σχόλια

1. Όπως ήταν αναμενόμενο στην κλειστή διαδρομή $x=0 \rightarrow x=+A \rightarrow x=0$ το έργο της συντηρητικής δύναμης $F_{\varepsilon\pi}$ είναι μηδέν. Το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι διαρκώς καταναλισκόμενο διότι η δύναμη απόσβεσης $F_{\alpha\pi}$ είναι διαρκώς αντίθετη από την ταχύτητα. Τα έργα όμως της δύναμης του διεγέρτη σε δύο αντίθετες μετατοπίσεις δεν είναι κατ' απόλυτη τιμή ίσα, αλλά η σχέση τους εξαρτάται από τη σχέση της συχνότητας του διεγέρτη f_{δ} με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος f_0 .

2. Από τη σχέση $W_{F_{\delta 1}} - W_{F_{\delta 2}} = mA^2 4\pi^2(f_0^2 - f_{\delta}^2)$ προκύπτει ότι :

$$\begin{cases} f_{\delta} < f_0 & W_{F_{\delta 1}} > W_{F_{\delta 2}} \\ f_{\delta} = f_0 & (\text{κατάσταση συντονισμού}) & W_{F_{\delta 1}} = W_{F_{\delta 2}} \\ f_{\delta} > f_0 & W_{F_{\delta 1}} < W_{F_{\delta 2}} \end{cases}$$

Δ1. α

Δ2. Τα διανύσματα των ταχυτήτων v_1 και v_2 είναι συγγραμμικά μπορούν όμως να είναι ομόρροπα ή αντίρροπα. Από την αρχή της επαλληλίας :

$$v = v_1 \pm v_2 \Rightarrow v^2 = (v_1 \pm v_2)^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \pm 2v_1v_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \pm mv_1v_2 \Rightarrow$$

$$K = K_1 + K_2 \pm \sqrt{mv_1}\sqrt{mv_2} \Rightarrow K_1 = K_1 + K_2 \pm \sqrt{2K_1}\sqrt{2K_2} \Rightarrow K = K_1 + K_2 \pm 2\sqrt{K_1K_2}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει για ενεργειακά μεγέθη.