

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Από το σχολικό βιβλίο, σελ. 111.

A2. Από το σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

A3. Από το σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

A4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $Dgoh = \{x \in Dh \text{ και } h(x) \in Dg\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \frac{4-e^{2x}}{e^x} \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

$$f(x) = (goh)(x) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4-x^2}{x}, x > 0$$

B2. i) $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = -\frac{x^2 + 4}{x^2} < 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\text{ii)} \quad \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \overset{f \text{ γνησίως φθίνουσα}}{\pi > e} \text{ ισχύει}$$

$$\text{B3)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(4-x^2) \frac{1}{x}] = +\infty$$

Άρα η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Άρα η $y = -x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\text{B4)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$\left| \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{|f(x)|} = 0 \text{ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\mathbf{\Gamma 1.} \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx=1$$

$$\int_2^3 (1+ax)dx=1 \Leftrightarrow \left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3+\frac{9a}{2}-(2+2a)=1 \Leftrightarrow 1+\frac{5a}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{5a}{2}=0 \text{ άρα } a=0.$$

$$\mathbf{\Gamma 2.} \text{ Για } x<1: \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = -1$$

$$\text{Για } x>1: \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} = -1.$$

Άρα f παραλληλόγραμμη στο $x_0=1$ και $f'(1)=-1$.

$$\mathbf{ii) (\epsilon):} \quad y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-1=-1(x-1)$$

$$y-1=-x+1$$

$$y=-x+2$$

$$\lambda=f'(1)=-1=\epsilon\varphi\omega, \text{ άρα } \omega=135^\circ$$

$$\mathbf{\Gamma 3.} \text{ Για } x<1: f'(x)=2x-3<0$$

άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

$$\text{Για } x>1: f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $f: "1-1"$.

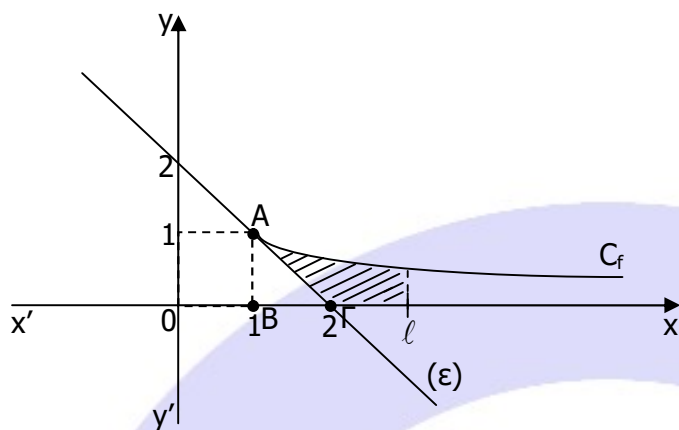
$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1=(-\infty, 1] \\ f \text{ γνησίως φθίνουσα} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Delta_1)=[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]=[1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-3x+3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_2=(1, +\infty) \\ f \text{ γνησίως φθίνουσα} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Delta_2)=(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x))=(0, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Άρα Σύνολο τιμών} = [1, +\infty) \cup (0, 1) = (0, +\infty).$$

Γ4. $y = -x + 2$ 

x	0	1	2
y	2	1	0

$$E = \int_1^e f(x) dx - (AB\Gamma) = \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{1 \cdot 1}{2} = [\ln x]_1^e - \frac{1}{2} = 1 - 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτω $h(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$, $x \neq 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Έχω: $f(x) = (x-1)h(x) + 2x$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)h(x) + 2x) = 0 \cdot \ell + 2 = 2$$

Η f συνεχής στο 1 άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 2$

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και $f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)}$

x	0	1	2
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Άρα η f συνεχής στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα άρα $f((0, 1]) = (-\infty, 2]$

Το $0 \in (-\infty, 2]$ άρα η f έχει ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ μοναδική επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Όμοια η f συνεχής στο $[0, 2)$ και γνησίως φθίνουσα άρα $f([1, 2)) = (\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1)) = (-\infty, 2)$

Όμοια η f έχει ρίζα $x \in (1, 2)$ μοναδική

Άρα η f έχει ακριβώς δύο ρίζες.

$$f\left(\frac{1}{3} = \ln \frac{5}{3}\right) > 0 \text{ άρα η ρίζα } x_1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ δηλαδή } x_1 < \frac{1}{3}.$$

Δ3. Για την f στο διάστημα $[x_1, \frac{1}{3}]$ εφαρμόζουμε το θεώρημα της μέσης τιμής.

Η f συνεχής σε $[x_1, \frac{1}{3}]$.

Η f παραγωγίσιμη σε $(x_1, \frac{1}{3})$.

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi \in (x_1, \frac{1}{3}) \subseteq (0,1) \text{ και } f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1 - 3x_1}.$$

2ος τρόπος λύσης:

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}, \quad x \in (0,1)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} = -\left(\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x^3}\right) < 0 \text{ για } x \in (0,1).$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και συνεχής άρα το σύνολο τιμών $f'((0,1)) = (\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)) = (0, +\infty)$

$$\text{ο αριθμός } \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{\ln \frac{5}{3}}{\frac{1}{3} - x_1} > 0 \text{ επειδή } x_1 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} - x_1 > 0 \text{ και } \ln \frac{5}{3} > 0.$$

$$\text{Άρα ο αριθμός } \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1} \in (0, +\infty) \text{ (σύνολο τιμών) άρα υπάρχει } \xi \in (0,1) : f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$$

Δ4. i) Ισχύει: $F(x) = G(x) + C, \quad x \in (0,2)$

$$\text{Για } x=x_1: F(x_1) = G(x_1) + C \Leftrightarrow 0 = G(x_1) + C \Leftrightarrow G(x_1) = -C$$

$$\text{Για } x=x_2: F(x_2) = G(x_2) + C \Leftrightarrow F(x_2) = C$$

$$\text{Άρα: } F(x_2) + G(x_1) = C - C = 0$$

$$\text{ii)} \quad x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x \Leftrightarrow x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x = 0$$

$$\text{Έστω } \Phi(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x$$

Η Φ συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$$\Phi(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 =$$

$$x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 = -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2$$

$$\Phi(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1$$

Θα δείξω ότι $F(x_2) > 0$.

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 1]$ άρα $f([x_1, 1]) = [f(x_1), f(1)] = [0, 2]$

Όμοια η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, x_2]$ άρα $f([1, x_2]) = [f(x_2), f(1)] = [0, 2]$

Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ και δεν είναι παντού $f(x) = 0$.

$$\text{Άρα } \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx > 0 \Leftrightarrow [F(x)]_{x_1}^{x_2} > 0 \Leftrightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0 \Leftrightarrow F(x_2) > F(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) > 0$$

$$\text{Άρα } \Phi(x_1) = -(x_2 F(x_1) + (x_2 - x_1)) < 0$$

$$\Phi(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$$

$\Phi(x_1) \cdot \Phi(x_2) < 0$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in (x_1, x_2) : \Phi(x_0) = 0$$

$$\Phi'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = f(x)(x_1 + x_2) + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2).$$

Η Φ γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα μοναδική.

Επιμέλεια

Ανδρέου Α. – Ζαντιώτη Ε. - Καρπούζης Γ. – Καρτσώνη Κ.