

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Από το σχολικό βιβλίο, σελ. 186.

A2. Από το σχολικό βιβλίο, σελ. 142.

A3. Από το σχολικό βιβλίο, σελ. 161.

A4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $A' = \{x \in [0, +\infty) / g(x) \in (-\infty, 1]\} = [0, 1] \neq \emptyset$

Επειδή $g(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

Άρα ορίζεται η $h(x) = (f \circ g)(x)$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και τύπο:

$h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1$ δηλαδή $g(x) = -x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, x \in [0, 1]$.

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και $h'(x) = 2(x-1)$

$h'(x) < 0$ για $x \in [0, 1]$ άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ άρα και 1-1 υπάρχει η

αντίστροφη της με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της h .

Το $h([0, 1]) = [h(1), h(0)] = [0, 1]$ επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

Άρα η h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και τότε

$\psi = h(x) \Leftrightarrow \psi = (x-1)^2 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{\psi} \Leftrightarrow 1-x = \sqrt{\psi} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{\psi}, \psi \in [0, 1]$

Άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0, 1]$.

B3. i) Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{(1 - x)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} = f(1)$$

Αφού η φ είναι συνεχής στο 1 άρα συνεχής στο $[0, 1]$.

$\varphi(0) = 1$ και $f(1) = \frac{1}{2}, \varphi(0) \neq \varphi(1)$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.

ii) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu(\frac{\pi}{6}) < \eta\mu\alpha < \eta\mu(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$.

Άρα από **i)** (θεώρημα ενδιάμεσων τιμών) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

G1. Ισχύει: $f(0) = 0$ και για $x < -1$: $f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$ άρα υπάρχει $C_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = -2x + C_1$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$.

Για $x > -1$ ισχύει $f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$ άρα υπάρχει $C_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = x^3 - x + C_2 \quad \forall x > -1$.

Επειδή $f(0) = 0$ για το $x = 0$ έχουμε $0 = C_2$.

Άρα $f(x) = x^3 - x, x \in (-1, +\infty)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο -1 ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + C_1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) \Leftrightarrow 2 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -2$$

$$\text{Άρα: } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση

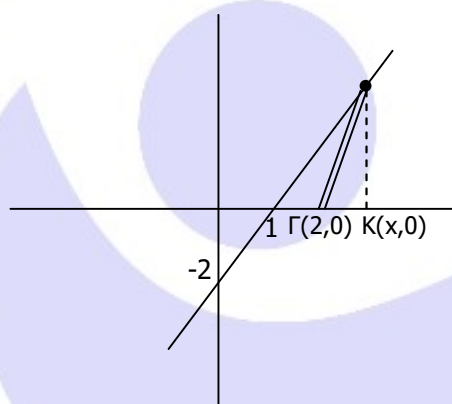
$$\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \psi - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) \quad (\varepsilon)$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $(0, -2)$ άρα:

$$-2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^2 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \text{ απορ.} \\ x_0 = 1 \end{cases} \text{ άρα } x_0 = 1$$

$$(\varepsilon): \psi - 0 = 2(x - 1) \Leftrightarrow \psi = 2x - 2.$$

Γ3.



$$E(t) = \frac{1}{2} \psi(t)(x(t) - 2) = \frac{1}{2} 2(x(t) - 1)(x(t) - 2) = (x(t) - 1)(x(t) - 2) = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

$$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$$

$$E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 12 - 6 = 6 \text{ τ.μ./s}$$

$$\textbf{Γ4.} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| = |\eta\mu x| \left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \quad \forall x < 0$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{|f(x)|} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0 \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0.$$

Όταν $x \rightarrow -\infty$ $x < -1$ άρα $-x > 1$.

$$\text{Οπότε } f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -(x^3 - x).$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x}{-x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{-x^3} = 1.$$

$$\text{Τελικά: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1 - x^3} \right) = 0 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει στο 1 ολικό ελάχιστο το $f(1) = 1 - \ln 3$ δηλαδή $f(x) \geq 1 - \ln 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ άρα το σύνολο τιμών $f((0, 1]) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [1 - \ln 3, +\infty)$.

Επειδή $1 - \ln 3 < 0$ το $0 \in [1 - \ln 3, +\infty)$ άρα η f έχει ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ μοναδική επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Όμοια $f([1, +\infty)) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [1 - \ln 3, +\infty)$

το $0 \in [1 - \ln 3, +\infty)$ άρα η f έχει ρίζα $x_2 \in (1, +\infty)$ και είναι μοναδική επειδή η f γνησίως αύξουσα.

Άρα η f έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η f κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) και δεν έχει ρίζα, άρα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα αυτό και επειδή $1 \in (x_1, x_2)$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

$$\text{Άρα } E = \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x - \ln 3x) dx = - \left[\frac{x^2}{2} - x \ln 3x + x \right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$- \left(\frac{x_2^2}{2} - x_2 \ln 3x_2 + x_2 \right) + \left(\frac{x_1^2}{2} - x_1 \ln 3x_1 + x_1 \right) =$$

$$- \left(\frac{x_2^2}{2} - x_2 x_2 + x_2 \right) + \left(\frac{x_1^2}{2} - x_1 x_1 + x_1 \right) =$$

$$- \left(\frac{x_2^2}{2} - x_2^2 - x_2 \right) + \left(\frac{x_1^2}{2} - x_1 + x_1 \right) =$$

$$- \left(-\frac{x_2^2}{2} - x_2 \right) + \left(-\frac{x_1^2}{2} + x_1 \right) =$$

$$\frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) \left(\frac{1}{2} (x_1 + x_2) \right) - 1 = (x_2 - x_1) \frac{x_1 + x_2 - 2}{2} = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) (x_1 + x_2 - 2)$$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$x_1 < 2 - x_1 < x_2$$

$$x_1 < 2 - x_1 \Leftrightarrow 2x_1 < 2 \Leftrightarrow x_1 < 1 \text{ ισχύει:}$$

$2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$ ισχύει από το **Δ2** επειδή $E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$ και επειδή

$x_2 - x_1 > 0$ ισχύει $x_1 + x_2 - 2 > 0$.

Η f μεταξύ του x_1 και x_2 παίρνει αρνητικές τιμές άρα $f(2-x_1) < 0$.

Δ4. Η εξίσωση γράφεται:

$$2f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \quad (1)$$

Ισχύει $f(x) \geq 1 - \ln 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και το $=$ ισχύει μόνο για $x=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_2, 0)$ έχει εξίσωση $\psi - 0 = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \psi = f'(x_2)(x - x_2)$.

Η f κυρτή άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και το $=$ ισχύει μόνο για $x=x_2$.

$$\text{Άρα } \left. \begin{array}{l} f(x) \geq 1 - \ln 3 \\ f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2f(x) > 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2)$$

δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη. (Δεν μπορούν και τα δύο να είναι συγχρόνως ίσα επειδή $1 \neq x_2$)

ΣΧΟΛΙΟ:

Τα φετινά θέματα ήταν σαφώς διατυπωμένα και περιελάμβαναν ερωτήσεις από όλη την ύλη. Το πρώτο ήταν θέμα θεωρίας που δεν δυσκόλεψε τους υποψήφιους. Το δεύτερο απαιτούσε βασικές γνώσεις που και σε αυτό οι υποψήφιοι δεν πρέπει να αντιμετώπισαν δυσκολία. Το τρίτο θέμα είχε κάποια σημεία που απαιτούσαν ιδιαίτερη προσοχή γιατί μπορούσες εύκολα να κάνεις λάθος. Τα Δ1 και Δ2 απαιτούσαν καλή γνώση της ύλης και εξάσκηση, ενώ τα Δ3 και Δ4 εκτός από τα προηγούμενα απαιτούσαν και «πονηρή» μαθηματική σκέψη και παρατηρητικότητα και ήταν τα ερωτήματα που θα ξεχωρίσουν τους άριστους από τους πολύ καλούς.

Επιμέλεια

Ανδρέου Α. – Ζαντιώτη Ε. - Καρπούζης Γ. – Καρτσώνη Κ.